

Известия вузов. Строительство. 2022. № 8. С. 53–64.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2022; (8): 53–64.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 624.07:699.842.001.84

DOI: 10.32683/0536-1052-2022-764-8-53-64

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ВНЕШНEM ВОЗДЕЙСТВИИ

Юрий Александрович Чиркунов, Михаил Юрьевич Чиркунов

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин), Новосибирск, Россия

Аннотация. Наличие нестационарных экстремальных внешних воздействий на такие строительные объекты, как сваи и колонны, может привести к их разрушению. К внешним воздействиям относятся, например, сильные сейсмические колебания, вызванные землетрясением или взрывом в результате какой-либо техногенной катастрофы, а также резкая просадка свай и колонн из-за образования провалов при таянии вечной мерзлоты. Все реальные волновые процессы являются нелинейными. Продольное динамическое деформирование свай и колонн в результате таких воздействий в настоящей работе исследуется с помощью нелинейной модели, описывающей продольную динамическую деформацию упругого стержня со степенной нелинейностью при наличии экстремального нестационарного внешнего источника. Получены все ее автомодельные подмодели. Исходная модель имеет 10 существенно различных подмоделей. Для некоторых подмоделей не произойдет разрушения стержня, если только он не разрушится в начальный момент времени под действием экстремального внешнего воздействия. Для других подмоделей найдено время разрушения стержня в результате достижения критического значения величины продольной деформации (предел прочности материала стержня). При некоторых частных значениях параметров, от которых зависят полученные подмодели, построено десять графиков распределения продольной деформации в стержне.

Ключевые слова: сваи и колонны, нелинейная продольная динамическая деформация упругого стержня со степенной нелинейностью, экстремальное внешнее воздействие, автомодельные решения, время разрушения стержня

Для цитирования: Чиркунов Ю.А., Чиркунов М.Ю. Автомодельные динамические продольные деформации упругого стержня со степенной нелинейностью при экстремальном нестационарном внешнем воздействии // Известия вузов. Строительство. 2022. № 8. С. 53–64. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-764-8-53-64.

Original article

SELF-SIMILAR DYNAMIC LONGITUDINAL DEFORMATIONS OF AN ELASTIC ROD WITH POWER-LAW NONLINEARITY UNDER EXTREME NONSTATIONARY EXTERNAL INFLUENCE

Yuri A. Chirkunov, Mihail Yu. Chirkunov

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk, Russia

Abstract. The presence of non-stationary extreme external influences on such construction objects as piles and columns can lead to their destruction. Such impacts include, for example, strong seismic vibrations caused by an earthquake or explosion as a result of some man-made disaster, as well as a sharp subsidence of piles and columns as a result of the formation of failures during the melting of permafrost. All real wave processes are non-linear. Longitudinal dynamic deformation of piles and columns as a result of such actions in this paper is studied using a nonlinear model that describes the longitudinal dynamic deformation of an elastic rod with a power-law nonlinearity in the presence of an extreme non-stationary external source. All its self-similar submodels are obtained. The original model has 10 significantly different such submodels. For some submodels, the rod will not break unless it breaks at the initial time under the action of an extreme external influence. For other submodels, the time of destruction of the rod is found as a result of reaching the critical value of the value of longitudinal deformation (ultimate strength of the rod material). For some particular values of the parameters on which the obtained submodels depend, ten graphs of the distribution of longitudinal strain in the rod were constructed.

Keywords: piles and columns, nonlinear longitudinal dynamic deformation of an elastic rod with power nonlinearity, extreme external impact, self-similar solutions, time of destruction of the rod

For citation: Chirkunov Yu.A., Chirkunov M.Yu. Self-similar dynamic longitudinal deformations of an elastic rod with power-law nonlinearity under extreme nonstationary external influence. *News of Higher Educational Institutions. Construction.* 2022; (8): 53–64. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2022-764-8-53-64.

Введение. Для исследования продольной динамической деформации в колоннах и сваях при сильных сейсмических колебаниях, вызванных землетрясением или взрывом, а также при провалах, образующихся под сваями и колоннами в результате таяния вечной мерзлоты, используется нелинейная модель, описывающая продольную динамическую деформацию упругого стержня со степенной нелинейностью при наличии экстремального нестационарного внешнего источника. Эта модель задается следующим нелинейным дифференциальным уравнением [1–6]:

$$u_{tt} = (u^\alpha u_x)_x + \frac{\lambda}{t^2} u, \quad (1)$$

где t – время, x – координата поперечного сечения стержня; $u = u(t, x)$ – продольное перемещение поперечного сечения x стержня за время t . Параметры α и λ – любые ненулевые вещественные числа, которые для каждого конкретного материала находятся эмпирически. Параметр α определяет характер нелинейности продольных колебаний, а параметр λ – нестационарный характер источника. Слагаемое $\frac{\lambda}{t^2} u$ означает, что деформация стержня

происходит под действием нестационарного внешнего источника с силой, пропорциональной продольному перемещению.

Решения уравнения (1) определяют подмодели для модели, задаваемой этим уравнением. При $\alpha = -\frac{4}{3}$ модель была исследована в работе [6]. Она обладает другими групповыми свойствами и, следовательно, другими подмоделями. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $\alpha \left(\alpha + \frac{4}{3} \right) \neq 0$.

Автомодельные решения. Уравнение (1) допускает следующие преобразования растяжения:

$$t' = a^\beta t, \quad x' = a^{\beta+1} x, \quad u' = a^{\frac{2\beta}{\alpha}} u, \quad (2)$$

$$t' = t, \quad x' = bx, \quad u' = b^{\frac{2}{\alpha}} u, \quad (3)$$

где $a > 0$, $b > 0$, β – произвольные вещественные числа. То есть уравнение (1) после преобразований (2) или (3) сохраняет свой вид. Решение любого дифференциального уравнения, инвариантного относительно преобразования растяжения, является автомодельным [7–9]. Множество преобразований растяжения, допускаемых уравнением (1), состоит из преобразований (2) и (3).

Следовательно, автомодельные решения этого уравнения исчерпываются решениями, инвариантными относительно каждого из этих преобразований. Настоящая статья посвящена исследованию моделей продольного деформирования стержня, описываемых этими автомодельными решениями.

1. Решение, инвариантное относительно преобразований (2)

Это решение имеет разный вид при $\beta \neq -1$ и при $\beta = -1$.

1.1. Решение при $\beta \neq -1$.

Это решение имеет вид

$$u = x^{\frac{2\beta}{\alpha(\beta+1)}} U(\xi), \quad \xi = tx^{-\frac{1}{\beta+1}}. \quad (4)$$

Функция $U = U(\xi)$ определяет динамическую составляющую продольного перемещения сечения стержня. После подстановки (4) в (1) получаем уравнение

$$\begin{aligned} & \alpha((\xi^2 U^\alpha - (\beta + 1)^2) U')' - \beta(\alpha + 4)\xi U^\alpha U' + \\ & + \frac{2\beta}{\alpha}(\alpha(\beta - 1) + 2\beta) U^{\alpha+1} = \frac{\lambda\alpha(\beta + 1)^2}{\xi^2} U. \end{aligned} \quad (5)$$

- Если $\xi^2 U^\alpha - (\beta + 1)^2 \neq 0$, то с помощью новой неизвестной функции

$$W = (\xi^2 U^\alpha - (\beta + 1)^2) U'$$

уравнение (5) записывается в виде эквивалентной ему системы первого порядка:

$$\begin{aligned} U' &= \frac{W}{\alpha(\xi^2 U^\alpha - (\beta+1)^2)}, \\ W' &= \frac{\beta(\alpha+4)\xi U^\alpha W}{\alpha(\xi^2 U^\alpha - (\beta+1)^2)} - \frac{2\beta}{\alpha}(\alpha(\beta-1)+2\beta)U^{\alpha+1} - \frac{\lambda\alpha(\beta+1)^2}{\xi^2}U. \end{aligned} \quad (6)$$

А именно:

1) для любого решения уравнения (5) пара функций $(U(\xi), W(\xi))$ является решением системы (6), где $W(\xi) = (\xi^2 U^\alpha - (\beta+1)^2)U'$;

2) для любого решения системы (6) функция $U(\xi)$ является решением уравнения (5).

Пусть в сечении стержня $x_0 > 0$ в момент времени $t_0 > 0$ измерены продольное перемещение u_0 и скорость его изменения u_1

$$u(t_0, x_0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) = u_1. \quad (7)$$

В силу (4) условия (7) принимают вид:

$$U(\xi_0) = x_0^{\frac{-2\beta}{\alpha(\beta+1)}} u_0, \quad W(\xi_0) = \alpha x_0^{\frac{\alpha-2\beta}{\alpha(\beta+1)}} (t_0^2 x_0^{-2} u_0^\alpha - (\beta+1)^2) u_1, \quad \xi_0 = t_0 x_0^{\frac{-1}{\beta+1}}. \quad (8)$$

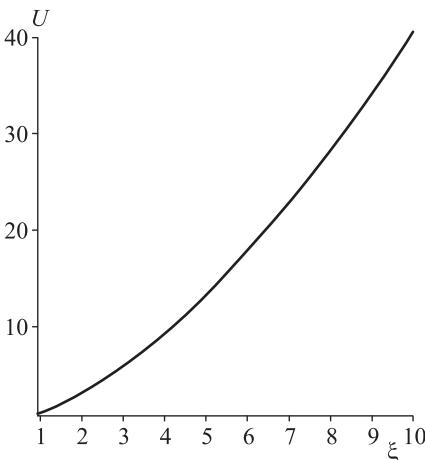
$$\text{Если } u_0 \neq (\beta+1)^2 t_0^{-2} x_0^{\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha(\beta+1)}},$$

то в силу гладкости правых частей системы (6) решение задачи Коши (6), (8) существует и единственno в окрестности точки ξ_0 . Это означает, что можно корректно решать численно нелинейную задачу Коши (6), (8). В результате в силу (4) получается единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (7). Следовательно, если в сечении стержня $x_0 > 0$ в момент времени $t_0 > 0$ измерены продольное перемещение и скорость его изменения, то можно однозначно определить продольное перемещение в окрестности точки (t_0, x_0) .

Для выяснения характера поведения продольного перемещения с течением времени численно решается задача Коши (6), (8) для конкретных значений входящих в нее параметров, фиксация которых определяет конкретную подмодель рассматриваемой модели (1).

Для $t_0 = 1$, $x_0 = 1$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $\alpha = -4$, $\beta = 1$ график функции $U = U(\xi)$, определяющей зависимость продольного перемещения от времени, показан на рис. 1. Этот график получен в результате численного решения задачи Коши для системы (6) с условиями (8) методом Рунге–Кутта–Фельберга, приведенным в [10] (с порядком точности 4 (5)).

Из рис. 1 видно, что для данной подмодели продольное перемещение в каж-



Rис. 1. Распределение динамической составляющей продольного перемещения

Fig. 1. Distribution of the dynamic component of the longitudinal displacement

дой точке x монотонно возрастает с течением времени, что вызовет его разрушение.

- Если $\xi^2 U^\alpha - (\beta + 1)^2 = 0$, то из уравнения (4) следует, что

$$\lambda = -\frac{2\beta}{\alpha}(\alpha\beta + 2\beta + 4) \neq 0.$$

В этом случае продольное перемещение определяется по формуле

$$u = \left((\beta + 1) \frac{x}{t} \right)^{\frac{2}{\alpha}}. \quad (9)$$

Это решение имеет физический смысл только при $\beta > -1$.

Продольная деформация имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon(t, x) = \frac{2}{\alpha} (\beta + 1)^{\frac{2}{\alpha}} t^{-\frac{2}{\alpha}} x^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}.$$

При $\alpha > 0$ в каждом поперечном сечении стержня с течением времени деформация монотонно убывает и $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Значит, если только стержень не разрушится в начальный момент времени, то разрушение стержня со временем не произойдет.

При $\alpha < 0$ в каждом поперечном сечении стержня с течением времени деформация монотонно возрастает и $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, в точке x_* произойдет разрушение стержня в момент времени

$$t_* = (\beta + 1) \left(\frac{2}{\alpha \varepsilon_*} \right)^{\frac{\alpha}{2}} x_*^{\frac{2-\alpha}{2}},$$

где ε_* – критическое значение продольной деформации (предельная прочность материала данного стержня).

Пусть $\alpha = \beta = 1$, $t > 0$, $x > 0$. В этом случае график распределения деформации в стержне показан на рис. 2.

Из рис. 2 следует, что для данной подмодели разрушение стержня не произойдет, если только он не разрушится в начальный момент времени.

1.2. Решение при $\beta = -1$.

Это решение имеет вид

$$u = t^{-\frac{2}{\alpha}} U(x). \quad (10)$$

После подстановки (10) в (1) получаем уравнение

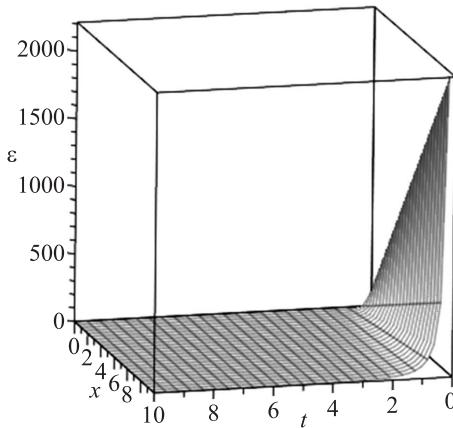
$$(U^\alpha U')' + \left(\lambda - \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha^2} \right) U = 0.$$

- Если $\lambda = \frac{2(\alpha + 2)}{\alpha^2}$ ($\alpha \neq -2$), то продольное перемещение определяется

по формулам

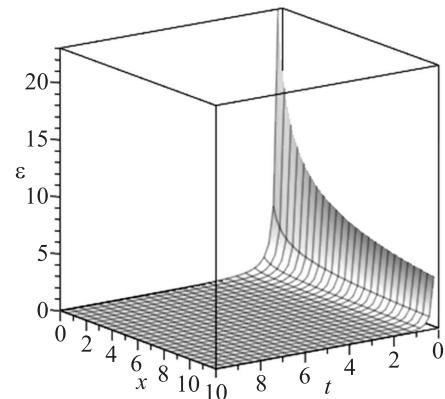
$$u = t^{-\frac{2}{\alpha}} \begin{cases} (c_1(\alpha + 1)x + c_2)^{\frac{1}{\alpha+1}}, & \text{при } \alpha \neq -1, \\ c_2 \exp(c_1 x), & \text{при } \alpha = -1, \end{cases} \quad (11)$$

где c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные.



Rис. 2. Распределение деформации в стержне при $\alpha = \beta = 1$, $t > 0$, $x > 0$

Fig. 2. Distribution of deformation in the rod at $\alpha = \beta = 1$, $t > 0$, $x > 0$



Rис. 3. Распределение деформации в стержне при $\alpha = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $t > 0$, $x > 0$

Fig. 3. Distribution of deformation in the rod at $\alpha = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $t > 0$, $x > 0$

Продольная деформация имеет вид

$$\varepsilon = c_1 t^{\frac{2}{\alpha}} \begin{cases} (c_1(\alpha+1)x + c_2)^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}, & \text{при } \alpha \neq -1, \\ c_2 \exp(c_1 x), & \text{при } \alpha = -1. \end{cases}$$

При $\alpha > 0$ в каждом поперечном сечении стержня с течением времени деформация монотонно уменьшается и $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, разрушение стержня с течением времени не произойдет, если только он не разрушится в начальный момент времени под действием сингулярного возмущения.

Пусть $\alpha = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $t > 0$, $x > 0$. В этом случае график распределения деформации в стержне показан на рис. 3.

При $\alpha < 0$ в каждом поперечном сечении стержня с течением времени деформация монотонно увеличивается и $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, в точке x_* произойдет разрушение стержня в момент времени

$$t_* = \left(\frac{c_1}{\varepsilon_*} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \begin{cases} (c_1(\alpha+1)x_* + c_2)^{\frac{-\alpha^2}{2(\alpha+1)}}, & \text{при } \alpha \neq -1, \\ c_2^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left(\frac{\alpha c_1 x_*}{2}\right), & \text{при } \alpha = -1, \end{cases}$$

где ε_* – критическое значение продольной деформации (предельная прочность материала данного стержня).

Пусть $\alpha = -\frac{1}{2}$, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $t > 0$, $x > 0$. В этом случае график распределения деформации в стержне показан на рис. 4.

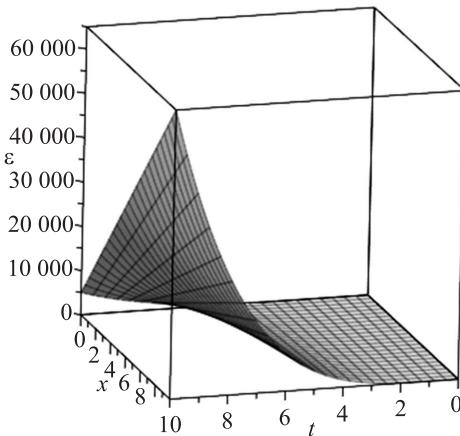


Рис. 4. Распределение деформации в стержне при $\alpha = -\frac{1}{2}$, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $t > 0$, $x > 0$

Fig. 4. Distribution of deformation in the rod at $\alpha = -\frac{1}{2}$, $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $t > 0$, $x > 0$

Пусть $\alpha = -1$, $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = 1$. В этом случае график распределения деформации в стержне показан на рис. 5.

Рис. 4 и 5 показывают, что для подмоделей с выбранными значениями величин α , c_1 , c_2 разрушение стержня произойдет очень быстро.

- Если $\lambda \neq \frac{2(\alpha+2)}{\alpha^2}$, $(\alpha+1)(\alpha+2)\left(\alpha + \frac{4}{3}\right) \neq 0$, то продольное перемещение имеет вид

$$u = t^{-\frac{2}{\alpha}} \left(\left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right)^2 \left(1 - \frac{\lambda\alpha^2}{2(\alpha+2)} \right) (x+c_3)^2 + c_4 \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (12)$$

где c_3 , c_4 – произвольные вещественные постоянные.

Продольная деформация определяется по формуле

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{2(\alpha+1)}{\alpha^2} \left(1 - \frac{\lambda\alpha^2}{2(\alpha+2)} \right) t^{-\frac{2}{\alpha}} (x+c_3) \times \\ & \times \left(\left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right)^2 \left(1 - \frac{\lambda\alpha^2}{2(\alpha+2)} \right) (x+c_3)^2 + c_4 \right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Пусть $\alpha = 2$, $c_3 = \sqrt{3}$, $c_4 = 1$, $\lambda = 1$, $t > 0$, $x > 0$. В этом случае график распределения деформации в стержне показан на рис. 6.

Из рис. 6 следует, что для данной подмодели разрушения стержня не произойдет, если только он не разрушится в начальный момент времени под действием сингулярного возмущения.

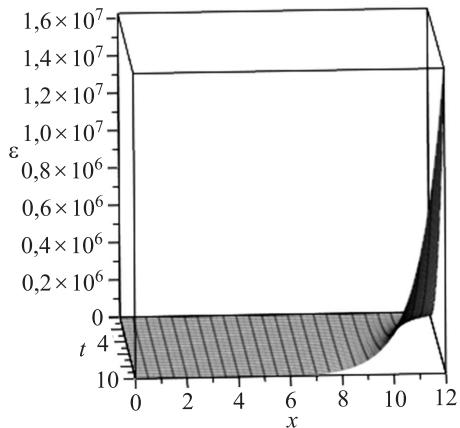
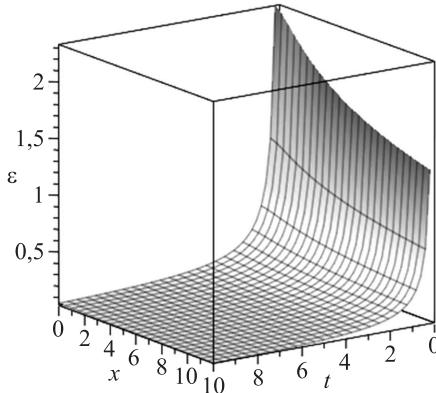


Рис. 5. Распределение деформации в стержне при $\alpha = -1$, $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = 1$

Fig. 5. Distribution of deformation in the rod at $\alpha = -1$, $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = 1$



Rис. 6. Распределение деформации в стержне при $\alpha = 2$, $c_3 = \sqrt{3}$, $c_4 = 1$, $\lambda = 1$, $t > 0$, $x > 0$

Fig. 6. Distribution of deformation in the rod at $\alpha = 2$, $c_3 = \sqrt{3}$, $c_4 = 1$, $\lambda = 1$, $t > 0$, $x > 0$

- Если $\alpha = -2$, то продольное перемещение имеет вид

$$u = tU(x), \quad (13)$$

где функция $U(x)$ неявно определяется квадратурой

$$\int \frac{dU}{U^2 \sqrt{c_5 - 2\lambda \ln U}} = \pm x + c_6.$$

Здесь c_5, c_6 – произвольные вещественные постоянные.

С помощью замены $W = \sqrt{c_5 - 2\lambda \ln U}$ это отношение приводится к виду

$$\int \exp\left(\frac{W^2}{2\lambda}\right) dW = \lambda(\mp x - c_6) \exp\left(\frac{c_5}{2\lambda}\right).$$

При $\lambda = -1$ интеграл в левой части является первообразной функции вероятности Лапласа.

Деформация определяется по формуле

$$\varepsilon = tU^2 \sqrt{c_5 - 2\lambda \ln U}.$$

- Если $\alpha = -1$, $\lambda \neq 2$, то уравнение (1) имеет три инвариантных решения

$$\begin{aligned} u = u_1(t, x) &= \frac{2t^2}{(2-\lambda)(x+c_7)}, \\ u = u_2(t, x) &= \frac{2c_8^2 c_9 t^2 \exp(c_8 x)}{(2-\lambda)(1-c_9 \exp(c_8 x))^2}, \\ u = u_3(t, x) &= \frac{c_{10}^2 t^2 \left(\operatorname{arctg}^2 \left(\frac{1}{2} c_{10} (x+c_{11}) \right) + 1 \right)}{2(2-\lambda)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где c_k ($k = 8, 9, 10, 11$) – произвольные вещественные постоянные.

Соответствующие деформации имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_1(t, x) &= -\frac{2t^2}{(2-\lambda)(x+c_7)^2}, \\ \varepsilon = \varepsilon_2(t, x) &= \frac{2c_8^3 c_9 t^2 (1+c_9 \exp(c_8 x))}{(2-\lambda)(1-c_9 \exp(c_8 x))^3}, \\ \varepsilon = \varepsilon_3(t, x) &= \frac{2c_{10}^3 t^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} c_{10} (x+c_{11}) \right)}{(2-\lambda)(4+c_{10}^2 (x+c_{11})^2)}. \end{aligned}$$

В каждом фиксированном сечении стержня с течением времени эти деформации монотонно возрастают и $\varepsilon_k \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2, 3$) при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, для каждой из этих подмоделей в точке x_* произойдет разрушение стержня в соответствующий момент времени t_{k*} ($k = 1, 2, 3$), где

$$t_{1*} = |x_* + c_7| \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \varepsilon_*}, \quad t_{2*} = \sqrt{\frac{(2-\lambda)\varepsilon_*(1-c_9\exp(c_8x_*))^3}{2c_8^3c_9(1+c_9\exp(c_8x_*))}},$$

$$t_{3*} = \sqrt{\frac{(2-\lambda)\varepsilon_*(4+c_{10}^2(x_*+c_{11})^2)}{2c_{10}^3\arctg\left(\frac{1}{2}c_{10}(x_*+c_{11})\right)}}.$$

Здесь ε_* – критическое значение продольной деформации (предельная прочность материала стержня).

Для этих подмоделей представлены графики распределения деформации в стержне при конкретных значениях входящих в них параметров.

При $\lambda = 3$, $c_7 = 1$, $t > 0$, $x > 0$ график распределения деформации в стержне показан на рис. 7.

При $\lambda = 1$, $c_8 = c_9 = -1$, $t > 0$, $x > 0$ график распределения деформации в стержне показан на рис. 8.

При $\lambda = 3$, $c_{10} = c_{11} = 1$, $t > 0$, $x > 0$ график распределения деформации в стержне показан на рис. 9.

2. Решение, инвариантное относительно преобразований (3)

Это решение имеет вид

$$u = x^\alpha U(t). \quad (15)$$

Подстановка (15) в (1) дает уравнение

$$U'' = \frac{2(\alpha+2)}{\alpha^2} U^{\alpha+1} + \frac{\lambda}{t^2} U.$$

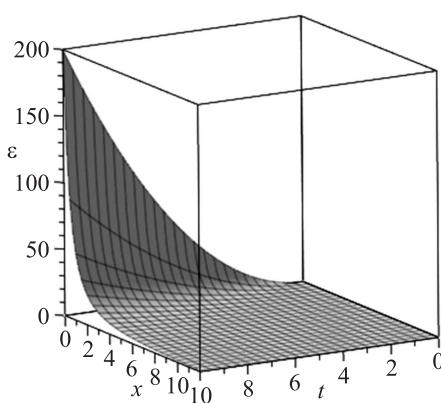


Рис. 7. Распределение деформации $\varepsilon = \varepsilon_1(t, x)$ в стержне

Fig. 7. Distribution of deformation $\varepsilon = \varepsilon_1(t, x)$ in the rod

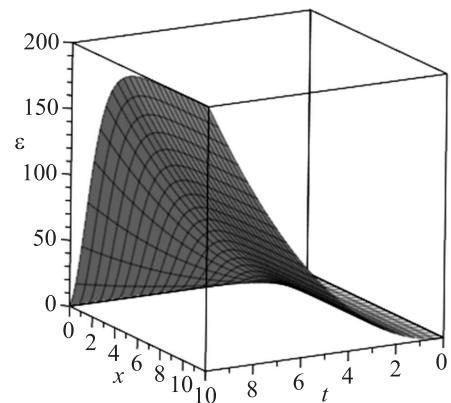
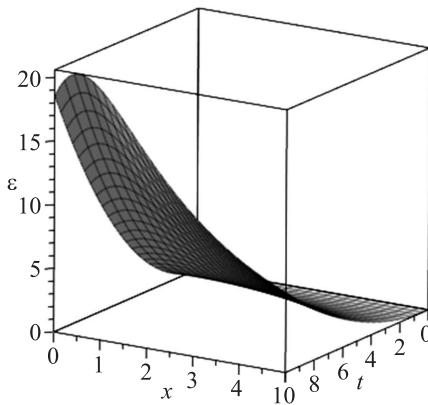


Рис. 8. Распределение деформации $\varepsilon = \varepsilon_2(t, x)$ в стержне

Fig. 8. Distribution of deformation $\varepsilon = \varepsilon_2(t, x)$ in the rod



Ruc. 9. Распределение деформации $\varepsilon = \varepsilon_3(t, x)$ в стержне

Fig. 9. Distribution of deformation $\varepsilon = \varepsilon_3(t, x)$ in the rod

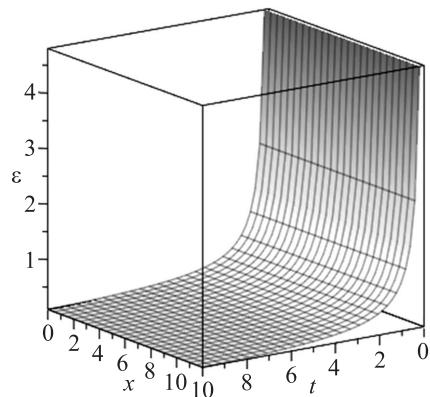


Рис. 10. Распределение деформации в стержне при $c_{12} = 0, c_{13} = -1, \lambda = 2, t > 0, x > 0$

Fig. 10. Distribution of deformation in the rod at $c_{12} = 0, c_{13} = -1, \lambda = 2, t > 0, x > 0$

При $\alpha = -2$ продольное перемещение определяется по формулам

$$u = \frac{\sqrt{t}}{x} \begin{cases} c_{12} t^{\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + c_{13} t^{-\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}}, & \text{при } \lambda \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup (0, \infty), \\ c_{14} \cos\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2} \ln t\right) + c_{15} \sin\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2} \ln t\right), & \text{при } \lambda \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right), \\ c_{16} + c_{17} \ln t, & \text{при } \lambda = -\frac{1}{4}, \end{cases} \quad (16)$$

где $c_k (k = 12, 13, \dots, 17)$ – произвольные вещественные постоянные.

Деформация имеет вид

$$\varepsilon = -\frac{\sqrt{t}}{x^2} \begin{cases} c_{12} t^{\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}} + c_{13} t^{-\frac{\sqrt{1+4\lambda}}{2}}, & \text{при } \lambda \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup (0, \infty), \\ c_{14} \cos\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2} \ln t\right) + c_{15} \sin\left(\frac{\sqrt{-1-4\lambda}}{2} \ln t\right), & \text{при } \lambda \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right), \\ c_{16} + c_{17} \ln t, & \text{при } \lambda = -\frac{1}{4}. \end{cases} \quad (17)$$

Деформация $\varepsilon = -c_{13} \frac{t^{\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{2}}}{x^2}$, $x \in (0, \infty)$ в каждом поперечном сечении

стержня с течением времени монотонно убывает и $\varepsilon \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Значит, в этом случае разрушения стержня со временем не произойдет, если только он не разрушится в начальный момент времени под действием сингулярного возмущения. При $c_{12} = 0, c_{13} = -1, \lambda = 2, t > 0, x > 0$ график распределения деформации в стержне показан на рис. 10.

Для других деформаций из (17) в каждом поперечном сечении стержня с течением времени деформация монотонно возрастает и $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Значит, в этом случае со временем произойдет разрушение стержня.

Заключение. Для исследования продольной динамической деформации в колоннах и сваях при сильных сейсмических колебаниях, вызванных землетрясением или взрывом, а также при провалах, образующихся под сваями и колоннами в результате таяния вечной мерзлоты, использована задаваемая дифференциальным уравнением (1) нелинейная модель, описывающая продольную динамическую деформацию упругого стержня со степенной нелинейностью при наличии экстремального нестационарного внешнего источника. Получены все ее автомодельные подмодели, задаваемые автомодельными решениями (4), (9)–(16). Исходная модель имеет 10 существенно различных подмоделей.

Для каждой подмодели при некоторых частных значениях параметров, от которых зависят полученные подмодели, построены графики распределения продольной деформации в стержне. Для некоторых подмоделей разрушения стержня не произойдет, если только он не разрушится в начальный момент времени под действием экстремального внешнего воздействия. Для других подмоделей найдено время разрушения стержня в результате достижения критического значения величины продольной деформации (предел прочности материала стержня).

Практическая значимость исследования заключается в следующем:

1) полученные подмодели описывают специальные нелинейные продольные динамические деформации в упругом стержне при экстремальном внешнем воздействии;

2) автомодельные решения, задающие эти подмодели можно использовать в качестве тестов в численных расчетах, которые могут выполняться при исследовании нелинейных продольных деформаций в упругих стержнях (сваях, колоннах и др.) при экстремальном внешнем воздействии;

3) автомодельность полученных решений позволяет использовать их для лабораторного, а не реального экспериментального исследования указанных деформаций.

Список источников

1. Kecs W.W., Torna A. Cauchy's problem for the generalized equation of the longitudinal vibrations of elastic rods // Eur. J. Mech. A. 1995. Vol. 14, no. 5. P. 827–835.
2. Rossit C.A., Bambill D.V., Laura P.A. Longitudinal vibrations of a prismatic ar suddenly subjected to a tensile load at one end when the other is elastically restrained // J. Sound and Vibr. 1995. Vol. 188. P. 145–148.
3. Fu Y.B., Ogden R.W. Nonlinear elasticity: Theory and applications. Cambridge: Univ. Press, 2001. 520 p.
4. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: Elsevier Science, 2005. 480 p.
5. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. New York: Dover Publications, 1991. 360 p.
6. Чиркунов Ю.А. Нелинейное моделирование динамических продольных деформаций упругого стержня при экстремальном нестационарном внешнем воздействии // Известия вузов. Строительство. 2020. № 5. С. 31–41.
7. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.

8. Чиркунов Ю.А. Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУЭиУ, 2007. 362 с.
9. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.
10. Butcher John C. Numerical methods for ordinary differential equations. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons, 2016. 538 p.

References

1. Kecs W.W., Torna A. Cauchy's problem for the generalized equation of the longitudinal vibrations of elastic rods. *Eur. J. Mech. A.* 1995; 14(5): 827–835.
2. Rossit C.A., Bambill D.V., Laura P.A. Longitudinal vibrations of a prismatic ar suddenly subjected to a tensile load at one end when the other is elastically restrained. *J. Sound and Vibr.* 1995; (188): 145–148.
3. Fu Y.B., Ogden R.W. Nonlinear elasticity: Theory and applications. Cambridge: Univ. Press, 2001. 520 p.
4. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: Elsevier Science, 2005. 480 p.
5. Graff K.F. Wave motion in elastic solids. New York: Dover Publications, 1991. 360 p.
6. Chirkunov Yu.A. Nonlinear simulation of dynamic longitudinal deformations of an elastic bar during extreme unsteady external influence. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo = News of Higher Educational Institutions. Construction.* 2020; (5): 31–41. (In Russ.).
7. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. Moscow, 1978. 399 p. (In Russ.).
8. Chirkunov Yu.A. Group analysis of linear and quasilinear differential equations. Novosibirsk: NSUEM, 2007. 362 p. (In Russ.).
9. Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. The elements of symmetry analysis of differential equations of continuous medium Mechanics. Novosibirsk: NGTU, 2012. 659 p. (In Russ.).
10. Butcher John C. Numerical methods for ordinary differential equations. 3rd Edition. New York: John Wiley & Sons, 2016. 538 p.

Информация об авторах

Ю.А. Чиркунов – доктор физико-математических наук, доцент
М.Ю. Чиркунов – аспирант

Information about the authors

Yu.A. Chirkunov – DSc, Ass. Professor
M.Yu. Chirkunov – Post-graduate Student

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 27.06.2022
Одобрена после рецензирования 27.07.2022
Принята к публикации 03.08.2022

The article was submitted 27.06.2022
Approved after reviewing 27.07.2022
Accepted for publication 03.08.2022