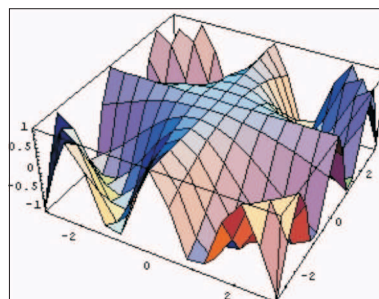


ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ



УДК 624.071.2

М.В. ШИТИКОВА

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИСЯЧИХ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ: ОБЗОР¹

Экспериментальные данные, полученные при исследовании висячих мостов, которые являются классическим примером висячих комбинированных систем, показывают, что разные колебательные движения обладают различными коэффициентами затухания амплитуд, а порядок малости этих коэффициентов говорит о низкой демпфирующей способности висячих систем, что приводит к перекачке энергии между вертикальными и крутильными колебаниями. Для приведения теоретических исследований в соответствие с экспериментами предложена модель с использованием дробных производных для описания процессов внутреннего трения, протекающих в висячих комбинированных системах при колебаниях. Приводится обзор работ, посвященных анализу нелинейных колебаний таких систем на основе обобщенного метода многих временных масштабов. Показана эффективность этого метода при изучении внутренних резонансов.

Ключевые слова: обобщенный метод многих временных масштабов, висячие комбинированные системы, нелинейные затухающие колебания, внутренний резонанс, дробная производная.

DOI 10.32683/0536-1052-2020-740-8-10-25

*Посвящается светлой памяти профессора
Николая Михайловича Кирсанова
и заслуженного деятеля науки РФ,
профессора Юрия Алексеевича Россихина*

Введение. Отправной точкой исследований, изложенных в данной работе, послужил просмотр документального фильма о крушении Такомаского висячего моста (the Tacoma Narrows Suspension Bridge) в 1940 г., который был организован на лекции в Воронежском инженерно-строительном институте профессором Николаем Михайловичем Кирсановым, ведущим российским специалистом в области металлических конструкций и висячих комбинированных систем.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00443.

© Шитикова М.В., 2020

Висячие мосты являются уникальными строительными конструкциями не только потому, что они позволяют перекрывать большие пролеты, но и потому, что они обладают несомненными эстетическими достоинствами. Висячие комбинированные системы являются весьма гибкими конструкциями, и под действием различных динамических нагрузок в них могут возбуждаться изгибно-крутильные колебания большой амплитуды. Вследствие низкой демпфирующей способности висячих мостов колебания могут сопровождаться перекачкой энергии между различными модами колебаний довольно длительное время даже после прекращения действия нагрузки, вызвавшей колебательные движения. Это объясняется явлением внутреннего резонанса, когда одна из собственных частот изгибных колебаний близка одной из собственных частот крутильных колебаний, что на практике встречается очень часто, вследствие плотного спектра собственных частот, который в основном зависит от геометрических параметров моста.

Для анализа явления внутреннего резонанса при динамическом отклике висячих мостов могут быть использованы различные модели. Так, континуальная модель, предложенная в [1], была принята в работах [2–6] для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику висячих мостов при внутренних резонансах один к одному [2–6] и два к одному [3–5] при помощи метода многих временных масштабов [7, 8], который является одним из методов теории возмущений. Анализ явлений внутреннего резонанса в висячих мостах был сделан М.В. Шитиковой и Ю.А. Россихиным [9] во время их пленарного доклада на 5-й Европейской конференции по гражданскому строительству во Флоренции (Италия) в 2014 г., во время которого авторы озвучили их мнение о том, что причиной крушения Такомоского моста явилось наступление внутреннего резонанса между крутильными и вертикальными модами колебаний.

Эта идея годом позже была повторена G. Arioli и F. Gazzola [10], которые, пытаясь объяснить, почему крутильные колебания вдруг появились перед крушением Такомоского моста, показали, что вертикальные колебания стали настолько большими, что перешли в крутильные и привели к катастрофе. Модель с четырьмя степенями свободы, включающая изгибно-крутильные движения балки жесткости и перемещения пары подвесок, предложена в [11], с ее помощью был рассмотрен внутренний резонанс между модами колебаний балки жесткости и подвесок. Устойчивость динамического отклика висячих мостов при внутреннем резонансе изучалась в [12].

Таким образом, возможное проявление внутреннего резонанса было определено как потенциальная причина критического состояния висячего моста. Следовательно, задача изучения внутренних резонансов в висячих комбинированных конструкциях является актуальной и важной.

В данной статье приводится обзор работ, посвященных анализу внутренних резонансов, при помощи метода многих временных масштабов, точнее одной из его разновидностей, которую Р. Sturrock [13] и А. Nayfeh [7, 14] назвали методом разложения производных. Этот метод был обобщен Ю. Россихиным и М. Шитиковой [15–17] с помощью использования дробных производных для описания сил сопротивления окружающей среды и внутреннего трения.

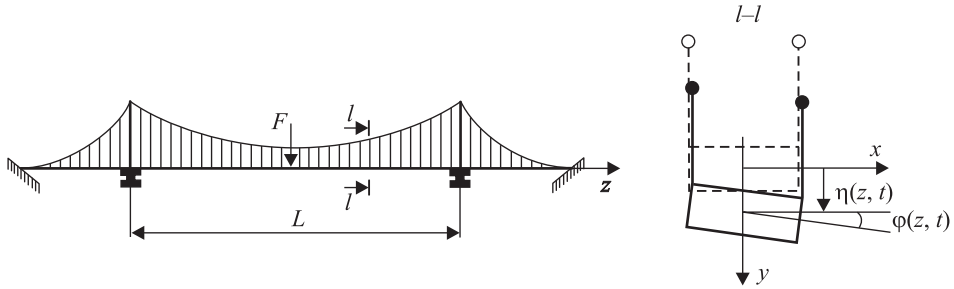


Рис. 1. Схема висячего моста

Нелинейные незатухающие свободные колебания висячих мостов.

Используя континуальную модель висячего моста [1], А. Abdel-Ghaffar и L. Rubin [2] при анализе нелинейных колебаний висячего моста с классической структурой (рис. 1), который является системой с бесконечным числом степеней свободы, показали, что вертикальные и крутильные моды колебаний могут быть связаны, приводя к интенсивному энергообмену между ними. Более того, возбуждение одной собственной формы может приводить к возникновению другой.

Следует отметить, что существует много различных моделей для изучения динамики висячих мостов как в линейной, так и нелинейной постановках, обзор которых можно найти в работах [10, 18, 19]. Так как основная цель нашего исследования – анализ внутренних резонансов при нелинейных колебаниях висячих мостов, то в дальнейшем будет использоваться континуальная модель [2], которая, с инженерной точки зрения, достаточно хорошо описывает динамическую реакцию реальных висячих систем, что подтверждается экспериментальными данными, полученными при натуральных испытаниях висячих мостов [20–22].

Следуя [2], рассмотрим классическую схему висячего моста (см. рис. 1) с бисимметричной балкой жесткости. Проанализируем случай, когда только две моды доминируют в колебательном процессе, а именно: вертикальная n -я мода с линейной собственной частотой ω_{0n} и крутильная m -я мода с собственной частотой Ω_{0m} . Доминирование при нелинейных колебаниях двух или нескольких собственных мод, связанных некоторым дополнительным условием, и быстрое затухание всех остальных форм колебаний подтверждается теоретическими и экспериментальными исследованиями для различных конструкций [8, 23].

При таком предположении функции перемещений $\eta(z, t)$ и $\varphi(z, t)$ можно приближенно представить в виде

$$\eta(z, t) \sim v_n(z)x_{1n}(t), \quad \varphi(z, t) \sim \Theta_m(z)x_{2m}(t), \quad (1)$$

где $x_{1n}(t)$ и $x_{2m}(t)$ – обобщенные перемещения; $v_n(z)$ и $\Theta_m(z)$ – собственные формы двух взаимодействующих мод колебаний.

Взаимодействие мод может наблюдаться при условии наступления внутреннего резонанса два к одному, когда линейная собственная частота ω_{0n} примерно равна удвоенному значению линейной собственной частоты Ω_{0m} , т.е.

$$\omega_0 = 2\Omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (2)$$

или внутреннего резонанса один к одному

$$\omega_0 = \Omega_0 + \varepsilon^2 \sigma, \quad (3)$$

где σ – параметр расстройки;

ε – малый параметр.

В этом случае разрешающая система уравнений в безразмерном виде была получена А. Abdel-Ghaffar и L. Rubin [2] относительно обобщенных перемещений:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + (b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2) x_1 = 0, \quad (4)$$

$$\ddot{x}_2 + \Omega_0^2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 + (c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2) x_2 = 0, \quad (5)$$

где точки означают производные по времени, все коэффициенты приведены в [2, 4], а индексы n и m , обозначающие номера взаимодействующих форм колебаний, опущены для простоты изложения.

Приближенное решение уравнений (4) и (5) для малых, но конечных амплитуд, слабоменяющихся с течением времени, может быть представлено в виде разложения по разным временным масштабам в следующем виде [7]:

$$x_1(t) = \varepsilon x_{11}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_{12}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 x_{13}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots, \quad (6)$$

$$x_2(t) = \varepsilon x_{21}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 x_{22}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 x_{23}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots, \quad (7)$$

где

$$T_n = \varepsilon^n t (n = 0, 1, 2, \dots) - \quad (8)$$

новые независимые переменные. Масштаб времени T_0 – быстрый, он характеризует движения с собственными частотами ω_0 и Ω_0 , масштаб времени T_1 является более медленным, чем T_0 , в то время как масштаб T_2 более медленный, чем T_1 . В общем случае время T_n более медленное, чем T_{n-1} . Все медленные времена характеризуют модуляции амплитуд и фаз нелинейных колебаний.

Соотношения (6)–(8) сводят задачу к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Так как уравнения движения содержат производные по времени, то необходимо представить их в виде разложений по новым временным масштабам. Так, первая производная имеет вид [7]

$$d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (9)$$

где $D_n = \partial/\partial T_n$.

Тогда вторая производная по времени может быть записана в виде

$$d^2/dt^2 = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (10)$$

Таким образом, соотношения (8)–(10) описывают одну из версий метода многих временных масштабов. Этот алгоритм был предложен Р. Sturrock [13] и А. Nayfeh [14]. Уравнения показывают, что равномерно пригодное разложение получается путем разложения производных и искомых величин по малому параметру. Поэтому Р. Sturrock [13] и А. Nayfeh [14] назвали этот алгоритм *методом разложения производных*.

Подставляя соотношения (6)–(10) в уравнения (4) и (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , можно получить уравнения для определения $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ ($i=1,2$). Так, ограничиваясь тремя слагаемыми в разложениях (6) и (7), т.е. учитывая масштабы T_0, T_1 и T_2 , получим

при ε :

$$D_0^2 x_{11} + \omega_0^2 x_{11} = 0, \quad D_0^2 x_{21} + \Omega_0^2 x_{21} = 0; \quad (11)$$

при ε^2 :

$$D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = -2D_0 D_1 x_{11} - a_{11} x_{11}^2 - a_{22} x_{21}^2, \quad (12)$$

$$D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = -2D_0 D_1 x_{21} - a_{12} x_{11} x_{21}; \quad (13)$$

при ε^3 :

$$D_0^2 x_{13} + \omega_0^2 x_{13} = -2D_0 D_1 x_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{11} - 2a_{11} x_{11} x_{12} - \\ - 2a_{22} x_{21} x_{22} - b_{11} x_{11}^3 - b_{22} x_{21}^2 x_{11}, \quad (14)$$

$$D_0^2 x_{23} + \Omega_0^2 x_{23} = -2D_0 D_1 x_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{21} - \\ - a_{12} (x_{11} x_{22} + x_{12} x_{21}) - c_{22} x_{21}^3 - c_{11} x_{11}^2 x_{21}. \quad (15)$$

Решение системы уравнений (11)

$$x_{11} = A_1(T_1, T_2) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}_1 \exp(-i\omega_0 T_0), \quad (16)$$

$$x_{21} = A_2(T_1, T_2) \exp(i\Omega_0 T_0) + \bar{A}_2 \exp(-i\Omega_0 T_0) \quad (17)$$

содержит комплексные функции A_1 и A_2 , зависящие от времен T_1 и T_2 , а \bar{A}_1 и \bar{A}_2 – функции, комплексно-сопряженные с A_1 и A_2 соответственно.

Подставляя теперь соотношения (16) и (17) в правые части уравнений (12) и (13), получим:

$$D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = -2i\omega_0 D_1 A_1 \exp(i\omega_0 T_0) - a_{11} A_1^2 \exp(2i\omega_0 T_0) - \\ - a_{11} A_1 \bar{A}_1 - a_{22} A_2^2 \exp(2i\Omega_0 T_0) - a_{22} A_2 \bar{A}_2 + cc, \quad (18)$$

$$D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = -2i\Omega_0 D_1 A_2 \exp(i\Omega_0 T_0) - \\ - a_{12} A_1 A_2 \exp[i(\omega_0 + \Omega_0) T_0] - a_{12} A_1 \bar{A}_2 \exp[i(\omega_0 - \Omega_0) T_0] + cc, \quad (19)$$

где cc означает комплексно-сопряженную часть к предыдущим слагаемым.

Из уравнений (18) и (19) видно, что они могут описывать случай внутреннего резонанса два к одному (2). Однако этот тип внутреннего резонанса не был рассмотрен в работе [2] (хотя и был упомянут). Это было сделано позже в работе [5].

Рассматривая далее случаи, отличные от условия (2), и замечая, что функции $\exp(i\omega_0 T_0)$ и $\exp(i\Omega_0 T_0)$, входящие в правые части уравнений (18) и (19), порождают вековые члены, необходимо привлечь уравнения, которые позволят от них освободиться, а именно:

$$D_1 A_1(T_1, T_2) = 0, \quad D_1 A_2(T_1, T_2) = 0, \quad (20)$$

откуда следует, что функции A_1 и A_2 должны не зависеть от времени T_1 .

Подставляя теперь уравнения (16)–(19) с учетом соотношений (20) в правые части уравнений (14) и (15), приходим к системе уравнений для определения x_{13} и x_{23} . Такая система уравнений была приведена в работе [2], где было рассмотрено несколько частных случаев, в том числе и случай внутреннего резонанса один к одному (3).

Всесторонний количественный и качественный анализ обоих случаев внутреннего резонанса, т. е. (2) и (3), которые могут проявляться в висячих мостах, приведен в работах [3–5]. При этом были найдены два первых интеграла уравнений (4) и (5), первый из которых определяет энергию системы, а второй позволяет найти функцию тока и провести гидродинамическую аналогию. Используя параметры висячего моста «Золотые ворота», приведенные в [2, 21], были построены фазовые портреты для нескольких случаев обоих типов внутренних резонансов.

Используя гидродинамическую аналогию (течение фазовой жидкости), был предложен качественный метод анализа нелинейных колебаний висячих комбинированных систем, который позволил определить типы колебательных процессов, исследовать устойчивость каждого колебательного режима, определить характер зависимостей амплитуд и фаз колебаний от начальных условий и т. д. Были сформулированы и доказаны теоремы, позволяющие обнаруживать различные режимы колебаний: периодические, аperiodические и стационарные. Эти колебательные режимы соответствуют трем типам энергообмена между вертикальными и крутильными модами: двусторонний энергообмен (периодическая перекачка энергии из одной подсистемы в другую, которая описывает аperiodические движения, модулированные по фазе и амплитуде), односторонний энергообмен (одна подсистема полностью или частично отдает свою энергию другой, что соответствует аperiodическим движениям, модулированным только по амплитуде), энергообмена не происходит при стационарных колебаниях, что соответствует движениям, модулированным только по фазе. Были получены солитоноподобные решения, описывающие полную одностороннюю перекачку энергии.

Нелинейные затухающие колебания висячих мостов. Естественным продолжением исследований, изложенных в работах [3–5], является анализ затухающих колебаний, поскольку все инженерные конструкции обладают внутренним структурным трением и работают в условиях окружающей среды, которая также оказывает влияние на затухание колебаний [24]. С этой целью в работе [25] в правых частях уравнений (4) и (5) были добавлены слагаемые, пропорциональные первой производной по времени от обобщенных перемещений и отвечающие силам сопротивления, как это обычно принято в динамике сооружений [26].

Аналогичный подход был реализован десять лет спустя в работе [6] с единственной разницей, заключающейся в том, что метод разложения производных был применен непосредственно к разрешающей системе уравнений, описывающих колебания висячего моста, без предварительного разложения перемещений по собственным формам колебаний.

Экспериментальные данные, полученные при натуральных испытаниях разных висячих мостов [20–22], показали, что моды колебаний обладают различными коэффициентами затухания амплитуд колебаний, а порядок малости этих коэффициентов говорит о низкой демпфирующей способности

висячих комбинированных систем, что приводит к длительной перекачке энергии из одной парциальной подсистемы в другую. Более того, с увеличением собственной частоты колебаний соответствующие коэффициенты демпфирования уменьшаются.

Однако при описании сил сопротивления при помощи слагаемых, пропорциональных первой производной по времени от перемещений, коэффициенты затухания висячих систем не зависят от частот колебаний [25]. Это означает, что такая модель демпфирования противоречит экспериментальным данным, полученным в [20–22].

Следовательно, возникает вопрос: возможно ли предложить модель, которая приведет к теоретическим результатам, находящимся в согласовании с экспериментальными? Ответ на этот вопрос был найден в 1997 г. профессором Ю.А. Россихиным и автором данной статьи, когда было предложено использовать дробные производные для описания сил сопротивления при колебаниях висячих мостов [15, 16].

Существует несколько определений производных дробного порядка, но в наследственной и строительной механике наиболее часто используется дробная производная Римана–Лиувилля [27]

$$D_{+}^{\gamma} f = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t \frac{f(t') dt'}{(t-t')^{\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \frac{f(t-t') dt'}{t'^{\gamma}}, \quad (21)$$

где $\Gamma(1-\gamma)$ – гамма-функция и $0 < \gamma < 1$ – порядок дробной производной.

Тогда уравнения движения затухающих нелинейных колебаний висячего моста принимают вид:

$$\ddot{x}_1 + \beta D_{+}^{\gamma_1} x_1 + \omega_0^2 x_1 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + (b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2) x_1 = 0, \quad (22)$$

$$\ddot{x}_2 + \beta D_{+}^{\gamma_2} x_2 + \Omega_0^2 x_2 + a_{12} x_1 x_2 + (c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2) x_2 = 0, \quad (23)$$

где слагаемые $\beta D_{+}^{\gamma_i} x_i$ ($i=1,2$) характеризуют неупругое сопротивление, β – коэффициент демпфирования.

Однако определение Римана–Лиувилля (21) не может быть непосредственно использовано в алгоритме метода многих временных масштабов, который был применен для решения задачи о свободных незатухающих колебаниях [2–5]. Для этой цели было найдено другое представление производной дробного порядка.

Дело в том, что в монографии [27, гл. 2, § 5, п. 7⁰] показано, что дробный порядок оператора дифференцирования $(d/dt)^{\gamma}$ эквивалентен производной Маршо, которая, в свою очередь, совпадает с производной Римана–Лиувилля D_{+}^{γ} для достаточно «хороших» функций

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\gamma} f = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_0^{\infty} \frac{f(t-t') - f(t)}{t'^{1+\gamma}} dt' = D_{+}^{\gamma} f \quad (24)$$

или с учетом равенства $\gamma\Gamma(\gamma) = \Gamma(1+\gamma)$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{\gamma} f = \frac{\gamma}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^{\infty} \frac{f(t) - f(t-t')}{t'^{1+\gamma}} dt' = D_{+}^{\gamma} f. \quad (25)$$

Для того чтобы использовать определение (24), в [15, 16] было впервые выполнено разложение дробного оператора (24) по новым временным масштабам в виде

$$\begin{aligned} D_+^\gamma &= (d/dt)^\gamma = (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^\gamma = \\ &= D_{0+}^\gamma + \varepsilon \gamma D_{0+}^{\gamma-1} D_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \gamma (\gamma-1) D_{0+}^{\gamma-2} D_1^2 + 2D_{0+}^{\gamma-1} D_2 + \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

где D_{0+}^γ получается при замене t в выражении (21) на T_0 .

Так, уравнения (21), (24)–(26) вместе с уравнениями (8)–(10) формулируют обобщенный метод многих временных масштабов. Этот алгоритм, следуя профессору А. Найфэ, можно назвать *методом разложения дробной производной*.

Система уравнений (22) и (23) описывает два процесса, которые связаны между собой и происходят одновременно: механизм обмена энергией между взаимодействующими вертикальными и крутильными модами и процесс диссипации энергии при этом взаимодействии. Поскольку дальнейшие исследования будут проводиться с помощью обобщенного метода многих временных масштабов и оба процесса должны протекать в одном масштабе времени, необходимо предположить, что коэффициент вязкости β можно представить в виде $\beta = \varepsilon^k \mu$, где μ – конечная величина, а $k = 1$ и 2 для случаев внутреннего резонанса 2:1 и 1:1 соответственно. При других порядках малости коэффициента вязкости диссипация энергии будет проходить либо слишком быстро, либо слишком медленно относительно процесса перекачки энергии.

Известно [16, 28], что дробная производная является непосредственным обобщением обычной производной. Действительно, когда $\gamma \rightarrow 1$, $D_+^\gamma x$ стремится к \dot{x} , т.е. при $\gamma \rightarrow 1$ дробная производная переходит в обыкновенную, и математическая модель затухающих колебаний переходит в модель Кельвина–Фойгта, в которой упругий элемент ведет себя нелинейно, а вязкий элемент – линейно. Когда $\gamma \rightarrow 0$, дробная производная $D_+^\gamma x$ стремится к $x(t)$. Другими словами, введение нового параметра – параметра дробности – наряду с параметром β позволяет варьировать не только величиной вязкости за счет увеличения или уменьшения параметра β , но и характером вязкости за счет изменения параметра дробности.

С учетом дополнительных слагаемых, содержащих дробные производные в уравнениях (22) и (23), и разложений дробных производных в соответствии с соотношением (26), уравнения (12)–(15) принимают соответственно следующий вид:

при ε^2 :

$$D_0^2 x_{12} + \omega_0^2 x_{12} = -2D_0 D_1 x_{11} - \mu(2-k) D_{0+}^{\gamma_1} x_{11} - a_{11} x_{11}^2 - a_{22} x_{21}^2, \quad (27)$$

$$D_0^2 x_{22} + \Omega_0^2 x_{22} = -2D_0 D_1 x_{21} - \mu(2-k) D_{0+}^{\gamma_2} x_{21} - a_{12} x_{11} x_{21}; \quad (28)$$

при ε^3 :

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{13} + \omega_0^2 x_{13} &= -2D_0 D_1 x_{12} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{11} - \\ &\quad - \mu(2-k) D_{0+}^{\gamma_1} x_{12} - \mu(2-k) \gamma_1 D_{0+}^{\gamma_1-1} D_1 x_{11} - \\ &\quad - \mu(k-1) D_{0+}^{\gamma_1} x_{11} - 2a_{11} x_{11} x_{12} - 2a_{22} x_{21} x_{22} - b_{11} x_{11}^3 - b_{22} x_{21}^2 x_{11}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 x_{23} + \Omega_0^2 x_{23} = & -2D_0 D_1 x_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_{21} - \\
 & -\mu(2-k) D_{0+}^{\gamma_2} x_{22} - \mu(2-k) \gamma_2 D_{0+}^{\gamma_2-1} D_1 x_{21} - \\
 & -\mu(k-1) D_{0+}^{\gamma_2} x_{21} - a_{12}(x_{11} x_{22} + x_{12} x_{21}) - c_{22} x_{21}^3 - c_{11} x_{11}^2 x_{21}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Чтобы решить уравнения (27)–(30), необходимо определить действие дробной производной D_{0+}^{γ} на функции x_{j1} и x_{j2} $j=1, 2$, т.е. подсчитать $D_{0+}^{\gamma} e^{i\omega t}$. В [16, 27] показано, что

$$D_{0+}^{\gamma} e^{i\omega t} = (i\omega)^{\gamma} e^{i\omega t}. \tag{31}$$

Заметим, что в связи с тем, что колебательный процесс начинается при $t=0$, дробная производная должна определяться на отрезке $[0, t]$, т.е.

$$D_{0+}^{\gamma} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(s) ds}{(t-s)^{\gamma}}. \tag{32}$$

Тогда вместо формулы (31) при действии дробной производной (32) на экспоненту следует использовать следующее выражение [29]

$$D_0^{\gamma} e^{i\omega t} = (i\omega)^{\gamma} e^{i\omega t} + \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u^{\gamma}}{u+i\omega} e^{-ut} du. \tag{33}$$

Однако второе слагаемое в (33), как это было доказано в [29], не влияет на построение решения обобщенным методом многих временных масштабов, если ограничиваться приближениями первого и второго порядка, т.е. при дальнейшем анализе можно использовать формулу (31), а также соотношение

$$i^{\gamma} = \cos \frac{\gamma\pi}{2} + i \sin \frac{\gamma\pi}{2} = e^{i \frac{\gamma\pi}{2}}. \tag{34}$$

Случай внутреннего резонанса 1:1 при $k=2$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ был рассмотрен в [16]. Представляя функции A_1 и A_2 в полярной форме, т.е.

$$A_1(T_2) = a_1(T_2) \exp[i\varphi_1(T_2)],$$

$$A_2(T_2) = a_2(T_2) \exp[i\varphi_2(T_2)],$$

и используя процедуру, предложенную в [15–17], приходим к системе уравнений для определения амплитуд и фаз нелинейных колебаний в случае внутреннего резонанса один к одному:

$$(a_1^2) + \mu\omega_0^{\gamma-1} a_1^2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma\right) - \frac{1}{2}\Gamma_1 a_1^2 a_2^2 \sin\delta = 0, \tag{35}$$

$$(a_2^2) + \mu\omega_0^{\gamma-1} a_2^2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma\right) + \frac{1}{4}\Gamma_2 a_1^2 a_2^2 \sin\delta = 0, \tag{36}$$

$$\dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma-1} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma\right) - \lambda_1 a_1^2 - \lambda_2 a_2^2 + \frac{1}{4}\Gamma_1 a_2^2 \cos\delta = 0, \tag{37}$$

$$\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\mu\omega_0^{\gamma-1} \cos\left(\frac{1}{2}\pi\gamma\right) - \lambda_3 a_1^2 - \lambda_4 a_2^2 + \frac{1}{4}\Gamma_2 a_1^2 \cos\delta = 0, \tag{38}$$

где $\delta = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$ – разность фаз, точка означает дифференцирование по времени T_2 , а коэффициенты Γ_i ($i = 1, 2$) и λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) приведены в [2, 16].

Исключая φ_1 и φ_2 из уравнений (37) и (38), находим

$$\dot{\delta} = 2(\lambda_3 - \lambda_1)a_1^2 + 3(\lambda_4 - \lambda_2)a_2^2 - \frac{1}{2}(\Gamma_2 a_1^2 - \Gamma_1 a_2^2)\cos\delta + 2\sigma. \quad (39)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений (35), (36) и (39), которые описывают модуляцию амплитуд и фаз свободных колебаний.

Умножая уравнение (36) на величину $\Gamma_1 \Gamma_2^{-1}$ и затем складывая полученное соотношение с уравнением (35), получим

$$\dot{E} + \alpha E = 0, \quad (40)$$

где функция $E(T_2) = a_1(T_2)^2 + \Gamma_1 \Gamma_2^{-1} a_2(T_2)^2$, пропорциональная квадратам амплитуд взаимодействующих мод, характеризует полную энергию системы в текущий момент времени T_2 , α – модальный коэффициент демпфирования, зависящий от параметра дробности γ

$$\alpha = \mu \omega_0^{\gamma-1} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\gamma\right). \quad (41)$$

Интегрируя уравнение (40), находим

$$E = E_0 \exp(-\alpha T_2), \quad (42)$$

где E_0 – постоянная интегрирования, пропорциональная начальному значению энергии системы [2].

Из уравнения (42) видно, что благодаря параметру дробности γ диссипация энергии системы зависит от собственной частоты колебаний. Когда $\gamma \rightarrow 1$, коэффициент демпфирования α стремится к коэффициенту вязкости μ , и уравнение (42) сводится к виду

$$E = E_0 \exp(-\mu T_2). \quad (43)$$

Из уравнения (43) следует, что при $\gamma=1$ коэффициент вязкости не зависит от собственной частоты ω_0 , что противоречит экспериментальным данным [20–22].

Случаи, когда силы сопротивления, проявляющиеся при вертикальных и крутильных колебаниях, обладают различными параметрами дробности, рассмотрены в работе [30].

Изложенная методика была распространена и на случай вынужденных колебаний под действием внешней гармонической силы [31], при этом было рассмотрено сочетание внутреннего резонанса один к одному с внешним резонансом, когда частота внешней возмущающей силы близка к одной из собственных частот вертикальных колебаний.

Корреляция с экспериментальными данными. Экспериментальные данные, полученные в [20, 21] при натурных испытаниях висячего моста «Винсент-Томас» в Лос-Анджелесе и «Золотые ворота» в Сан-Франциско, показали, что каждая мода колебаний имеет свой собственный коэффициент демпфирования, величина которого убывает с увеличением собственной частоты колебаний (см. табл. 2 в [20] и табл. 2–5 в [21]).



Рис. 2. Висячий мост «Золотые ворота»

Как это следует из соотношения (41), коэффициент демпфирования α удовлетворяет перечисленным свойствам. Более того, используя данные из таблиц, приведенных в [20, 21], можно определить параметр демпфирования μ и параметр дробности γ так, что каждая пара величин α и ω_0 (или α и Ω_0), взятые из таблиц экспериментальных данных, будут связаны между собой зависимостью (41).

Так, суммируя данные для моста «Золотые ворота» (рис. 2), приведенные в [21, табл. 2–5], для симметричных и антисимметричных вертикальных и крутильных мод в одну таблицу, располагая пары величин α и ω_0 в порядке возрастания собственных частот ω_0 и затем используя две пары экстремальных величин $\alpha_{1cp} = 0,085 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = 0,1221 \text{ рад/с}$ и $\alpha_{mcp} = 0,007 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{0n} = 1,6855 \text{ рад/с}$ из сводной таблицы, можно найти значения величин μ и γ ($n = 37$; α_{cp} – среднее значение величины α , соответствующее собственной частоте ω_0). В результате получим:

$$\gamma = 1 + \frac{\ln(\alpha_1 \alpha_n^{-1})}{\ln(\omega_{01} \omega_{0n}^{-1})} = 0,05; \quad \mu = \frac{\alpha_1 \omega_{01}^{1-\gamma}}{\sin(\pi\gamma/2)} = 0,15. \quad (44)$$

На рис. 3 показаны интервалы изменения экспериментального значения величины α для каждого фиксированного значения собственной частоты ω_0 и Ω_0 , а также зависимость α_{cp} от ω_0 для вертикальных мод и от Ω_0 для крутильных мод (пунктирные кривые, построенные по данным из [21]) и зависимость α от собственных частот (сплошные кривые, подсчитанные по формуле (41) при $\gamma = 0,05$ и $\mu = 0,15$). Из рис. 3 видно, что теоретические кривые зависимости α от собственных частот и кривые для экспериментальных средних значений α_{cp} довольно близки друг к другу и находятся внутри доверительного интервала экспериментально измеренных значений. Таким образом, выбранные значения γ и μ (44) можно принять за параметры данного висячего моста.

Выводы. В отличие от традиционного способа моделирования сил вязкого сопротивления при помощи производных первого порядка по времени от перемещений [26], в данной работе рассмотрен подход, основанный на использовании производных дробного порядка, который позволил получить коэффициенты демпфирования, зависящие от собственных частот колеба-

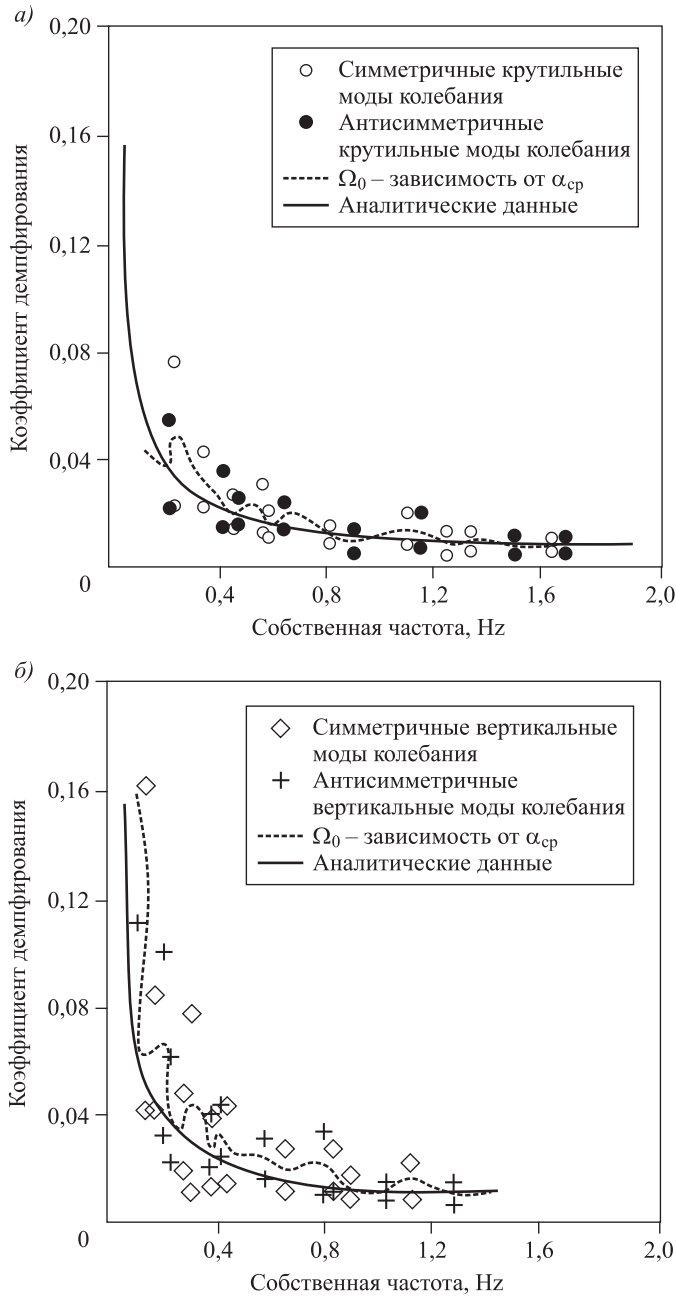


Рис. 3. Сравнение аналитических и экспериментальных результатов для вертикальных (б) и крутильных (а) мод висячего моста «Золотые ворота»

ний. Показано, что такой способ моделирования затухающих нелинейных колебаний обеспечивает хорошее согласование между теоретическими результатами и экспериментальными данными при соответствующем выборе параметра дробности (порядка дробной производной) и коэффициента демпфирования.

Привлечение дробных производных вызвало необходимость модификации метода многих временных масштабов, который авторами был назван

методом разложения дробных производных [15–17]. Он впервые был предложен для анализа нелинейных свободных колебаний висячих мостов [15, 16] и в дальнейшем показал свою эффективность при решении нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными, описывающих динамическое поведение различных строительных конструкций [28].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Abdel-Ghaffar A.M.* Suspension bridge vibration: Continuum formulation // *Journal of Engineering Mechanics Division*. 1982. Vol. 108. P. 1215–1232.
2. *Abdel-Ghaffar A.M., Rubin L.I.* Nonlinear free vibrations of suspension bridges: Theory and applications // *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 1983. Vol. 109. P. 333–345.
3. *Россихин Ю.А., Шитикова М.В.* Нелинейные свободные пространственные колебания висячих комбинированных систем // *Прикладная математика и механика*. 1990. Т. 54, № 6. С. 1003–1011.
4. *Россихин Ю.А., Шитикова М.В.* Влияние начальных условий на характер протекания колебательных процессов в висячей колебательной системе // *Известия Академии наук. Механика твердого тела*. 1991. № 3. С. 143–154.
5. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Analysis of nonlinear free vibrations of suspension bridges // *Journal of Sound and Vibration*. 1995. Vol. 186. P. 369–393.
6. *Cevika M., Pakdemirli M.* Non-linear vibrations of suspension bridges with external excitation // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2005. Vol. 40. P. 901–923.
7. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
8. *Nayfeh A.H., Balachandran B.* Modal interaction in dynamical and structural systems // *Applied Mechanics Reviews*. 1989. Vol. 42. P. S175–S201.
9. *Shitikova M.V., Rossikhin Yu.A.* Dynamics of suspension bridges: Nonlinear free and forced vibrations with internal resonances // *Plenary Lecture at the 5th European Conference of Civil Engineering (ECCIE '14), Florence, Italy Nov. 22–24, 2014*. In: *Recent Advances in Civil Engineering and Mechanics (M.V. Shitikova, L. Vladareanu, C. Guarnaccia, Editors)* WSEAS Press 2014. P. 10.
10. *Arioli G., Gazzola F.* A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge // *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39. P. 901–912.
11. *Lepidi M., Gattulli V.* Non-linear interactions in the flexible multi-body dynamics of cable-supported bridge cross-sections // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016. Vol. 80. P. 14–28.
12. *Capsoni A., Ardito R., Guerrieri A.* Stability of dynamic response of suspension bridges // *Journal of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 393. P. 285–307.
13. *Sturrock P.A.* Nonlinear effects in electron plasmas // *Proceeding of the Royal Society*. 1957. Vol. A242. P. 277–299.
14. *Nayfeh A.H.* A perturbation method for treating nonlinear oscillation problems // *Journal of Mathematical Physics*. 1965. Vol. 44. P. 368–374.
15. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional derivatives for the analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Theory and its Applications, NOLTA'97, Nov. 20–25, 1997, Hawaii, USA*. Vol. 1. P. 541–544.
16. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 1998. Vol. 124. P. 1029–1036.

17. *Shitikova M.V.* The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 99, No. 1. P. 109–122.
18. *Luco J.E., Turmo J.* Linear vertical vibrations of suspension bridges: a review of continuum models and some new results // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2010. Vol. 30. P. 769–781.
19. *Arena A., Lacarbonara W.* Nonlinear parametric modeling of suspension bridges under aeroelastic forces: torsional divergence and flutter // *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 70. P. 2487–2510.
20. *Abdel-Ghaffar A.M., Housner G.W.* Ambient vibration tests of suspension bridge // *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 1978. Vol. 104. P. 983–999.
21. *Abdel-Ghaffar A.M., Scanlan R.H.* Ambient vibration studies of Golden Gate Bridge. I: Suspended structure // *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 1985. Vol. 111. P. 463–482.
22. *Баранов В.А., Ефреушин С.В., Шитикова М.В.* Натурные испытания висячего моста через реку Сура // *Исследование висячих конструкций*. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989. С. 34–42.
23. *Nayfeh A.H.* Nonlinear interaction: Analytical, computational, and experimental methods. New York: Wiley, 2000.
24. *Brounjohn J.M.W.* Estimation of damping in suspension bridges // *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*. 1994. Vol. 104. P. 401–415.
25. *Россихин Ю.А., Шитикова М.В.* Влияние вязкости на характер протекания колебательных процессов в висячей колебательной системе // *Известия Академии наук. Механика твердого тела*. 1995. № 1. С. 168–177.
26. *Клаф Р., Пензиен Д.* Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
27. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
28. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Fractional calculus in structural mechanics // *Handbook of Fractional Calculus with Applications*. Vol. 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A, (D. Baleanu, A.M. Lopes, Eds.). Berlin: De Gruyter, 2019. P. 159–192.
29. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator // *Mechanics Research Communications*. 2012. Vol. 45. P. 22–27.
30. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Nonlinear free damped vibrations of suspension bridges with uncertain fractional damping // *Journal European des Systemes Automatises*. 2008. Vol. 42. P. 879–894.
31. *Shitikova M.V., Katembo A.* Analysis of nonlinear forced vibrations of fractionally damped suspension bridges subjected to one-to-one internal resonance // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020. Vol. 16, No. 2. P. 113–131.

Шитикова Марина Вячеславовна, д-р физ.-мат. наук, проф.;

E-mail: mvs@vgasu.vrn.ru

Воронежский государственный технический университет, Центр по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук

Получено 24.07.2020

Shitikova Marina Vyacheslavovna, DSc, Professor, E-mail: mvs@vgasu.vrn.ru

Voronezh State Technical University, Research Center on Dynamics of Solids and Structures, Russia

NONLINEAR VIBRATION ANALYSIS OF SUSPENSION COMBINED SYSTEMS: REVIEW

Experimental data on dynamics of suspension bridges, which belong to suspension combined systems, show that different vibrational motions possess different damping coefficients, and the low level of its magnitudes manifests the low damping capacity of suspension systems, resulting in the energy exchange between the vertical and torsional modes of vibrations. In order to lead the theoretical investigations in line with the experiment, fractional derivatives have been introduced for describing the processes of internal friction proceeding in suspension combined systems during vibrations. The review of papers dealing with the analysis of nonlinear vibrations of such systems on the basis of the generalized method of multiple time scales is presented. The efficiency of this method for studying the internal resonances is shown.

Keywords: method of multiple time scales, hanging combination systems, nonlinear damped oscillations, free non-linear damped vibrations, internal resonance, fractional derivative.

REFERENCES

1. *Abdel-Ghaffar A.M.* Suspension bridge vibration: Continuum formulation. *Journal of Engineering Mechanics Division*. 1982. Vol. 108. Pp. 1215–1232.
2. *Abdel-Ghaffar A.M., Rubin L.I.* Nonlinear free vibrations of suspension bridges: Theory and applications. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 1983. Vol. 109. Pp. 333–345.
3. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Nonlinear free spatial vibrations of combined suspension systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1990. Vol. 54, No. 6. Pp. 823–832.
4. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Effect of initial conditions on the behavior of vibrational processes in a combined suspension system. *Mechanics of Solids*. 1991. Vol. 26, No. 3. Pp. 157–166.
5. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Analysis of nonlinear free vibrations of suspension bridges. *Journal of Sound and Vibration*. 1995. Vol. 186. Pp. 369–393.
6. *Cevika M., Pakdemirli M.* Non-linear vibrations of suspension bridges with external excitation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2005. Vol. 40. Pp. 901–923.
7. *Nayfeh A.H.* *Perturbation Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1973.
8. *Nayfeh A.H., Balachandran B.* Modal interaction in dynamical and structural systems. *Applied Mechanics Reviews*. 1989. Vol. 42. Pp. S175–S201.
9. *Shitikova M.V., Rossikhin Yu.A.* Dynamics of suspension bridges: Nonlinear free and forced vibrations with internal resonances. Plenary Lecture at the 5th European Conference of Civil Engineering (ECCIE '14), Florence, Italy Nov. 22–24, 2014. In: *Recent Advances in Civil Engineering and Mechanics* (M.V. Shitikova, L. Vladareanu, C. Guarnaccia, Editors) WSEAS Press 2014. P. 10.
10. *Arioli G., Gazzola F.* A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39. Pp. 901–912.
11. *Lepidi M., Gattulli V.* Non-linear interactions in the flexible multi-body dynamics of cable-supported bridge cross-sections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2016. Vol. 80. Pp. 14–28.
12. *Capsoni A., Ardito R., Guerrieri A.* Stability of dynamic response of suspension bridges. *Journal of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 393. Pp. 285–307.

13. *Sturrock P.A.* Nonlinear effects in electron plasmas. *Proceeding of the Royal Society.* 1957. Vol. A242. Pp. 277–299.
14. *Nayfeh A.H.* A perturbation method for treating nonlinear oscillation problems. *Journal of Mathematical Physics.* 1965. Vol. 44. Pp. 368–374.
15. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional derivatives for the analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Theory and its Applications, NOLTA'97, Nov. 20–25, 1997, Hawaii, USA.* Vol. 1. Pp. 541–544.
16. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges. *ASCE Journal of Engineering Mechanics.* 1998. Vol. 124. Pp. 1029–1036.
17. *Shitikova M.V.* The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures. *Nonlinear Dynamics.* 2020. Vol. 99, No. 1. Pp. 109–122.
18. *Luco J.E., Turmo J.* Linear vertical vibrations of suspension bridges: a review of continuum models and some new results. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* 2010. Vol. 30. Pp. 769–781.
19. *Arena A., Lacarbonara W.* Nonlinear parametric modeling of suspension bridges under aeroelastic forces: torsional divergence and flutter. *Nonlinear Dynamics.* 2012. Vol. 70. Pp. 2487–2510.
20. *Abdel-Ghaffar A.M., Housner G.W.* Ambient vibration tests of suspension bridge. *ASCE Journal of Engineering Mechanics.* 1978. Vol. 104. Pp. 983–999.
21. *Abdel-Ghaffar A.M., Scanlan R.H.* Ambient vibration studies of Golden Gate Bridge. I: Suspended structure. *ASCE Journal of Engineering Mechanics.* 1985. Vol. 111. Pp. 463–482.
22. *Baranov V.A., Efryushin S.V., Shitikova M.V.* *Naturnye ispytaniya visyachego mosta cherez reku Sura [Ambient testing of the suspension bridge through the Sura river]. Issledovaniya visyachikh konstruktsiy [Investigations of Suspension Constructions].* Voronezh, Voronezh University, 1989. Pp. 34–42. (in Russian)
23. *Nayfeh A.H.* *Nonlinear interaction: Analytical, computational, and experimental methods.* New York: Wiley, 2000.
24. *Brounjohn J.M.W.* Estimation of damping in suspension bridges. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings.* 1994. Vol. 104. Pp. 401–415.
25. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Effect of viscosity on the vibrational processes in a combined suspension system. *Mechanics of Solids.* 1995. Vol. 30. Pp. 157–166.
26. *Clough R.W., Penzien J.* *Dynamics of structures.* New York, McGraw-Hill, 1975.
27. *Samko G.S., Kilbas A.A., Marichev O.I.* *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* N.Y., Gordon and Breach, 1993.
28. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Fractional calculus in structural mechanics. *Handbook of Fractional Calculus with Applications.* Vol. 7: Applications in Engineering, Life and Social Sciences, Part A, (D. Baleanu, A.M. Lopes, Eds.). Berlin: De Gruyter, 2019. Pp. 159–192.
29. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* On fallacies in the decision between the Caputo and Riemann-Liouville fractional derivatives for the analysis of the dynamic response of a nonlinear viscoelastic oscillator. *Mechanics Research Communications.* 2012. Vol. 45. Pp. 22–27.
30. *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* Nonlinear free damped vibrations of suspension bridges with uncertain fractional damping. *Journal European des Systemes Automatises.* 2008. Vol. 42. Pp. 879–894.
31. *Shitikova M.V., Katembo A.* Analysis of nonlinear forced vibrations of fractionally damped suspension bridges subjected to one-to-one internal resonance. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.* 2020. Vol. 16, No. 2. Pp. 113–131.