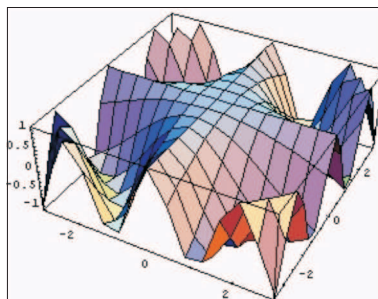


## ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ



УДК 624.016

А.В. МИЩЕНКО, И.В. РОМАДИНОВ

### ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ТЕРМОСИЛОВОЙ ИЗГИБ ГИБКОГО СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПРОФИЛИРОВАННОГО СТЕРЖНЯ\*

Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородного профилированного стержня построено на основе использования нелинейных условий равновесия и физических соотношений слоистого термоупругого стержня. Применена процедура Бубнова–Галеркина с разложением функций прогибов по координатным базисам. Выполнены численные расчеты деформированного и напряженного состояний слоистого стержня переменного сечения при заданных уровнях поперечных нагрузок и тепловых полей с варьированием продольной нагрузки. Установлено существенное влияние физической структуры, характера профилирования стержня и фактора нелинейности статических соотношений на исследуемые поля напряжений.

**Ключевые слова:** неоднородный стержень, слоистая структура, термоупругость, нелинейное деформирование, жесткостные характеристики, метод Бубнова–Галеркина.

DOI 10.32683/0536-1052-2021-745-1-5-16

Применение композитных материалов и дискретно-неоднородных структур позволяет создавать инженерные конструкции повышенной прочности, жесткости и устойчивости, что обуславливает широту и эффективность их использования в строительной практике. В настоящее время актуальными являются исследования, связанные с поиском рациональных физических структур неоднородных элементов [1, 2], оптимальной геометрической формы профилирования фазовых подструктур [3, 4], выявление параметров напряженно-деформированного состояния при сложных внешних воздействиях [5–9]. Особую значимость для неоднородных систем представляют исследования влияния на параметры локального и интегрального состояния факторов теплового воздействия [10–12], к которым большинство неоднородных систем имеют повышенную чувствительность.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00038 А.

В данной работе исследуется напряженно-деформированное состояние гибкого слоисто-неоднородного профилированного стержня при термосило-вом воздействии.

Стержень представляет собой  $s$ -фазное кусочно-однородное тело в пространстве  $x, y, z$ . Ось  $x$  имеет продольное направление, а структура в целом обладает симметрией относительно плоскости  $x, y$ . В зависимости от геометрической конфигурации фаз, пронумерованных от 1 до  $s$ , могут быть выделены частные типы структур [7]: поперечно- и продольно-слоистые, полярно- и радиально-слоистые, а также смешанные типы. В плоских стержневых системах наиболее эффективной является поперечно-слоистая структура стержневых элементов, в которой направление реализации неоднородности перпендикулярно продольной оси элемента.

Будем считать, что в стержне обеспечены условия идеального межфазного контакта при отсутствии разрывов в перемещениях на границах фаз; фазовые материалы представляют собой сплошную, однородную, линейно-упругую среду; значения физических характеристик материалов в фазах имеют одинаковый порядок. На рис. 1 показан вариант схемы поперечно-слоистого стержня, имеющего произвольную привязку к оси  $x$ , испытывающего воздействие произвольной плоской системы нагрузок и тепловое воздействие, переданное от внешней среды одним из типов граничных условий в задаче стационарной теплопроводности [8]. Будем считать, что в результате ее решения в  $s$ -х фазах выявлено поле внутренних температур  $t_k(x, y)$ , ( $k = 1, \dots, s$ ).

Для описания состояния неоднородного стержня с конфигурацией указанного типа примем следующие соотношения [7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_0 - \kappa y, \quad \varepsilon_y(x, y) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y) = 0, \\ \sigma_x^{(k)}(x, y) = E_k [\varepsilon_0(x) - \kappa(x)y - \alpha_k t_k(x, y)], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_0(x) = u', \quad \kappa(x) = v'', \quad (') = \partial() / \partial x, \quad (2)$$

где  $u, v$  – перемещения точек оси в направлении осей  $x, y$ ;

$\varepsilon_0, \kappa$  – деформация и кривизна оси стержня;

$E_k, \alpha_k$  – модуль упругости и коэффициент линейного теплового расширения материала  $k$ -й фазы.

Выражения для интегральных силовых факторов  $M, Q, N$ , уравнения равновесия в деформированном состоянии и физические зависимости представим в виде:

$$[N, Q, M](x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y] dA,$$

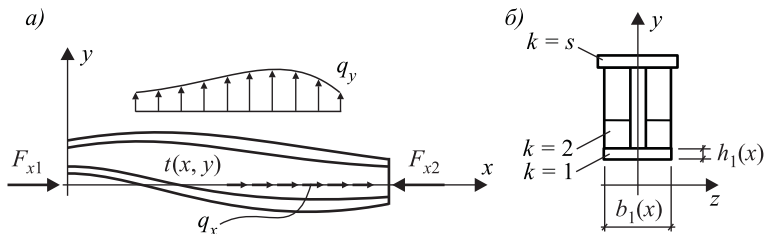


Рис. 1. Расчетная схема неоднородного профилированного стержня  
 а – схема нагружения, б – поперечное сечение;  $k = 1, 2, \dots, s$  – номера фаз (слоев)

$$N' + (Q\theta)' = -q_x, \quad Q' - (N\theta)' = q_y, \quad M' = Q + m_z, \quad (3)$$

$$\varepsilon_0 - y_0\kappa = \frac{N - N_t}{D_A}, \quad \kappa - \frac{y_0}{i_z^2}\varepsilon_0 = \frac{M - M_t}{D_I}, \quad (4)$$

$$y_0 = \frac{D_S}{D_A}, \quad i_z^2 = \frac{D_I}{D_A},$$

$$D_A(x) = \sum_{k=1}^s E_k \int_{A_k} dA, \quad D_S(x) = \sum_{k=1}^s E_k \int_{A_k} y dA, \quad D_I(x) = \sum_{k=1}^s E_k \int_{A_k} y^2 dA, \\ N_t(x) = - \sum_{k=1}^s \alpha_k E_k \int_{A_k} t_k(x, y) dA, \quad M_t(x) = \sum_{k=1}^s \alpha_k E_k \int_{A_k} t_k(x, y) y dA, \quad (5)$$

где  $q_x, q_y, m_z$  – заданные интенсивности внешних сил и моментов;

$\theta = \nu'$  – угол поворота поперечного сечения;

$y_0, i_z$  – координата центра жесткости и радиус жесткости неоднородного сечения;

$D_A, D_S, D_I$  – интегральные жесткостные характеристики слоистого сечения;

$N_t, M_t$  – температурные силовые факторы, представляющие собой усилия в слоистом сечении, возникающие при отсутствии деформаций;

$A_k$  – площадь  $k$ -й фазы в поперечном сечении стержня.

Интегрирование (3) с учетом малых величин  $\theta$  первого порядка при удовлетворении условий

$$N(0) = -F_{x0} - F_{y0}\theta(0), \quad Q(0) = F_{y0} - F_{x0}\theta(0), \quad M(0) = M_0,$$

где  $F_{x0}, F_{y0}, M_0$  – начальные силовые факторы, применение для двукратных интегралов интегрирования по частям дает выражения внутренних силовых факторов:

$$N = -F_{x0} - F_{y0}\theta - \int_0^x q_x dx - \theta \int_0^x q_y dx, \quad (6)$$

$$Q = -F_{x0}\theta + F_{y0} - \theta \int_0^x q_x dx + \int_0^x q_y dx, \quad (7)$$

$$M = M_0 - F_{x0}\nu + F_{y0}x + \int_0^x m_z dx - \\ - \int_0^x q_x(\xi) [\nu(x) - \nu(\xi)] d\xi + \int_0^x q_y(\xi)(x - \xi) d\xi. \quad (8)$$

Разрешив физические равенства (4) относительно обобщенных деформаций, с учетом (2) получим:

$$\begin{cases} \tilde{D}_I \nu'' = M - M_t + (N - N_t)y_0, \\ \tilde{D}_A u' = N - N_t + (M - M_t)y_S, \end{cases} \quad (9)$$

$$\tilde{D}_I = \gamma D_I, \quad \tilde{D}_A = \gamma D_A, \quad \gamma = 1 - \frac{y_0^2}{i_z^2}, \quad y_S = \frac{D_S}{D_I}.$$

Продифференцировав в системе (9) первое уравнение дважды, а второе единожды по  $x$ , учитывая (3), находим:

$$\begin{cases} [\tilde{D}_I v'']'' = (N\theta)' + q_y + m'_z - M''_t + [(N - N_t)y_0]'' , \\ [\tilde{D}_A u']' = N' - N'_t + [(M - M_t)y_S]' . \end{cases} \quad (10)$$

В зависимостях (7)–(10) величины

$$q_{yt} = -M''_t - (N_t y_0)' , \quad q_{xt} = -N'_t - (M_t y_S)' ,$$

согласно (5), являются тепловыми нагрузками. Связанность продольных и поперечных перемещений в неоднородном стержне в системе (10) обуславливают два фактора. Первый – структурный – определяется жесткостью  $D_S$ , второй – фактор геометрической нелинейности выражений (3). В случае выполнения  $D_S(x) \equiv 0$  и  $\theta \rightarrow 0$  система (10) распадается на два независимых уравнения для продольных и поперечных перемещений

$$[D_I v'']'' = q_y + m'_z - M''_t , \quad [D_A u']' = -q_x - N'_t .$$

Рассмотрим изгибное нелинейное деформирование неоднородного стержня, профилированного произвольным образом. Будем полагать, что функция усилий  $N(x)$  (6) найдена. Выполнив дифференцирование, запишем первое уравнение системы (10) в виде

$$L(v) = p_4 v^{IV} + p_3 v''' + p_2 v'' + p_1 v + p_0 = 0, \quad (11)$$

с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} p_4(x) &= \tilde{D}_I, & p_3(x) &= 2\tilde{D}'_I, & p_2(x) &= \tilde{D}''_I - N, \\ p_1(x) &= -N', & p_0(x) &= -q_y - m'_z - (Ny_0)'' + M''_t + (N_t y_0)'' . \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (11) в общем случае продольного профилирования неоднородного стержня выполним по методу Бубнова–Галеркина, приняв для прогиба разложение

$$v(x) \rightarrow \tilde{v}(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x), \quad (12)$$

где  $f_i(x)$  – базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям, а  $a_i$  – искомые коэффициенты.

Подставив аппроксимацию прогибов (12) в уравнение (11), выполним ортогонализацию полученной невязки к базисным функциям

$$\int_0^l L[\tilde{v}(x)] f_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

В развернутом виде имеем

$$\int_0^l \left\{ \sum_{j=1}^n a_j (p_4 f_j^{IV} + p_3 f_j''' + p_2 f_j'' + p_1 f_j') + p_0 \right\} f_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Введя обозначения

$$c_{ij} = \int_0^l f_i(x) (p_4 f_j^{IV} + p_3 f_j''' + p_2 f_j'' + p_1 f_j') dx, \quad b_i = - \int_0^l f_i(x) p_0 dx,$$

запишем систему уравнений для нахождения искомым коэффициентов  $a_j$  разложения (12) в виде

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} a_j = b_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

После нахождения величин  $a_j$  продольные перемещения могут быть определены с использованием физических зависимостей (4) при учете (2), (12) в форме

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \frac{N - N_t}{D_A} dx + \sum_{j=1}^n a_j \int_0^x y_0 f_j'' dx. \quad (13)$$

Здесь второе слагаемое отражает связанность продольных и поперечных перемещений в неоднородном профилированном стержне.

Основное нормальное напряжение в произвольной точке  $k$ -й фазы запишем на основе (1), (4), (12) в виде

$$\sigma_x^{(k)}(x, y) = E_k \left[ \frac{N - N_t}{D_A} - (y - y_0) \sum_{j=1}^n a_j f_j''(x) - \alpha_k t_k(x, y) \right]. \quad (14)$$

В соответствии с результатами, полученными в [7, 10], остальные компоненты напряжений в стержнях рассматриваемого типа могут не учитываться. В иных случаях они находятся по методике, описанной в [11]. Усилия  $N$ ,  $N_t$  в (13), (14) определяются выражениями (5), (6).

**Численное исследование.** Рассмотрим пример расчета стержня, нагруженного осевой силой  $F_x$  и поперечной нагрузкой  $q_y$  при воздействии однородного температурного поля  $t(x, y) = t$  (рис. 2).

Компоновка поперечного сечения выполнена в форме неоднородного двутавра с переменной высотой стенки. Первый слой (нижняя полка) изготовлен из стали С245, второй – из алюминиевого сплава АД31Т5, третий (верхняя полка) – из титанового сплава ВТ1. Поперечные размеры трех слоев и физические характеристики используемых материалов указаны в табл. 1.

Приняты следующие значения параметров  $l = 3$  м,

$$h_2(x) = h_{2,u} + h_{2,d}(x), \quad h_{2,d}(x) = h_{\max} - 4(h_{\max} - h_{\min})(x/l - 0,5)^2,$$

$$h_{2,u} = 60 \text{ мм}, \quad h_{\min} = 40 \text{ мм}, \quad h_{\max} = 100 \text{ мм},$$

$$q_y(x) = q_{\max} [0,2 + \sin(\pi x / l)], \quad r_k = R_k / R_{\max}.$$

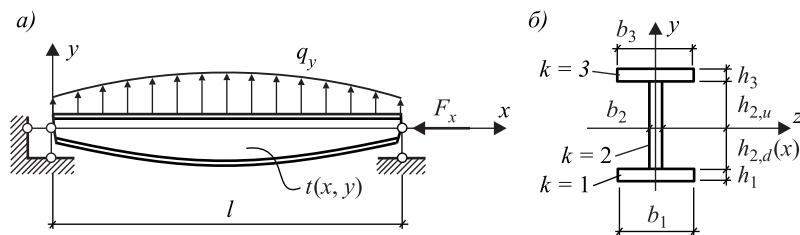


Рис. 2. Расчетная схема слоисто-неоднородного стержня  
а – схема нагружения, б – поперечное сечение

Таблица 1. Данные о геометрических и физических параметрах неоднородного стержня

Номер слоя $k$	Материал	$E$ , ГПа	$\alpha$ , $10^{-6}$ град. $^{-1}$	$R$ , МПа	$b$ , мм	$h$ , мм
1	C245	206	11,9	245	100	8
2	АД31Т5	70	23,0	100	6	$h_2(x)$
3	ВТ1	112	8,2	375	100	8

При описании прогибов (12) использованы базисные функции  $f_i(x) = \sin(i\pi x/l)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

На рис. 3–6 приведены результаты расчета стержня на силовое воздействие ( $t = 0$ ). Для продольной нагрузки выполнен переход к безразмерной форме  $n = F_x / F_*$ , где  $F_* = \frac{\pi^2}{l^3} \int_0^l \gamma D_I dx$  – параметр, имеющий размерность

силы, записанный в форме критической силы с использованием интегральной средней приведенной изгибной жесткости  $\gamma D_I$ .

Серия графиков на рис. 3 отражает нелинейную зависимость максимального прогиба  $v_{\max}$  от параметра  $n$  при различных уровнях параметра поперечной нагрузки  $q_{\max} = 0, 20, 60, 80, 110, 150$  (кН/м),  $t = 0$ . По мере роста силы  $F_x$  кривизна графиков нарастает и при  $n \rightarrow 1$  имеем  $v_{\max} \rightarrow \pm\infty$ . Спецификой профилированного неоднородного стержня является зависимость знака функции  $v(x)$  от характера геометрического профилирования – асимметрии его структуры и значения поперечной нагрузки. До значения  $q_{\max} \sim 52$  кН/м преобладающее влияние оказывает геометрический фактор с реализацией отрицательных прогибов ( $v_{\max} < 0$ ). При дальнейшем увеличении  $q_{\max}$  прогибы становятся положительными (направление – вверх).

На рис. 4 показаны результаты расчета напряжений  $\sigma_x$  в сечении  $x = l/2$  для случая  $q_{\max} = 6$  кН/м,  $t = 0$ . Данные напряжения определены в шести

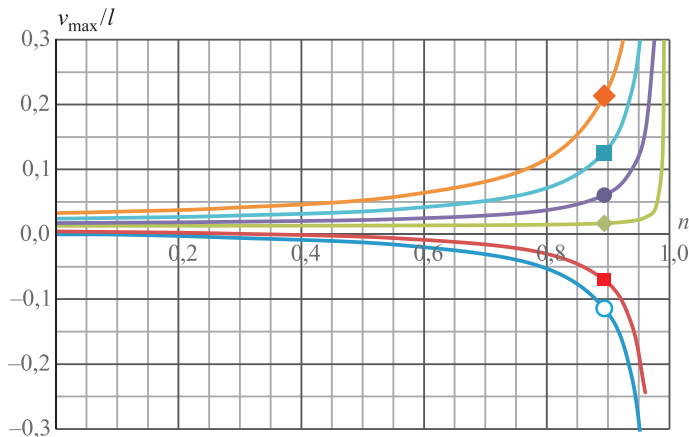


Рис. 3.  $t = 0$ . Графики максимального прогиба  $v_{\max}(n)$  при различных значениях  $q_{\max}$ , кН/м.

○ – 0, □ – 20, ◇ – 60, ● – 80, ■ – 110, ◆ – 150

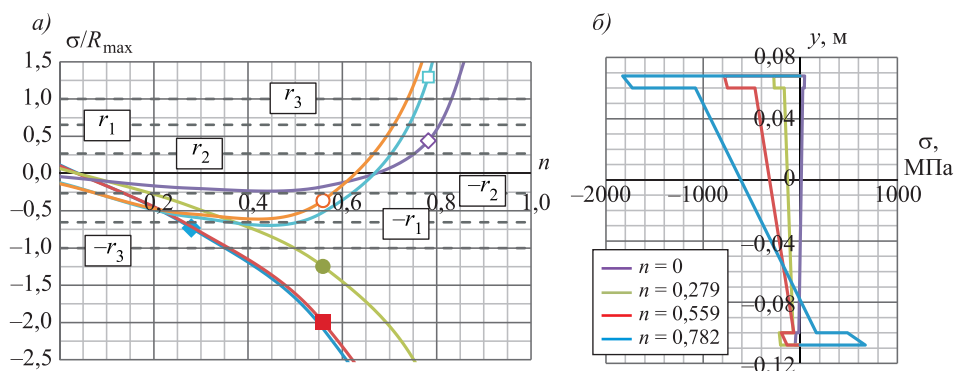


Рис. 4.  $q_{\max} = 6$  кН/м,  $t = 0$ ,  $x = l/2$

○ – 1, □ – 2, ◇ – 3, ● – 4, ■ – 5, ◆ – 6 (а); эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x(n, y)$  (б)

расчетных точках, расположенных на двух границах каждого из трех слоев и имеющих координаты  $y = [y_1, y_2 - 0, y_2 + 0, y_3 - 0, y_3 + 0, y_4]$ . Здесь  $y_1, \dots, y_4$  – координаты границ слоев, пронумерованные снизу вверх.

В начальном состоянии ( $n = 0$ ) при поперечном изгибе реализуется разноточечная эпюра напряжений (рис. 4, б). Качественно таковой она остается до уровня продольной нагрузки  $n = 0,04$ . При дальнейшем ее увеличении в интервале  $n \in [0,04; 0,63]$  во всем сечении действуют сжимающие напряжения, а при  $n > 0,63$  растяжение появляется в точке 1, а затем во 2-й и 3-й, что объясняется нелинейным ускоренным ростом положительного изгибающего момента (8).

Для оценки прочности на рис. 4, а показаны уровни безразмерных расчетных сопротивлений материала  $\pm r_k = \pm R_k / R_{\max}$  трех слоев (табл. 1). При отсутствии продольной нагрузки ( $n = 0$ ) уровень поперечной нагрузки  $q_{\max} = 6$  кН/м обеспечивает прочность во всех расчетных точках. Далее, по мере роста  $n$  наблюдался переход в предельное состояние в соответствии с данными табл. 2 (строка 1).

При большем уровне поперечной нагрузки, равной  $q_{\max} = 10$  кН/м, в исходном состоянии ( $n = 0$ ) напряжения во всех точках также не превышают расчетных сопротивлений, однако предельные значения параметра  $n$  становятся другими (табл. 2, строка 2).

Задав поперечную нагрузку  $q_{\max} = 20$  кН/м, получим серию кривых  $\sigma_x(n, y)$ , показанных на рис. 5, а с предельными значениями продольных нагрузок, приведенными в третьей строке табл. 2. На рис. 5 видим, что при сохранении указанных выше стадий изменения напряжений нелинейность изменения силовых факторов проявляется позднее в силу значительности начальных напряжений от поперечной нагрузки  $q_y$ .

Таблица 2. Предельные значения параметра продольной нагрузки  $n$  в расчетных точках стержня сечения  $x = l/2$

$q$ , кН/м	1	2	3	4	5	6
6	0,72	0,37	0,75	0,20	0,36	0,35
10	0,25	0,24	0,42	0,23	0,29	0,28
20	0,10	0,12	0,17	0,30	0,48	0,47

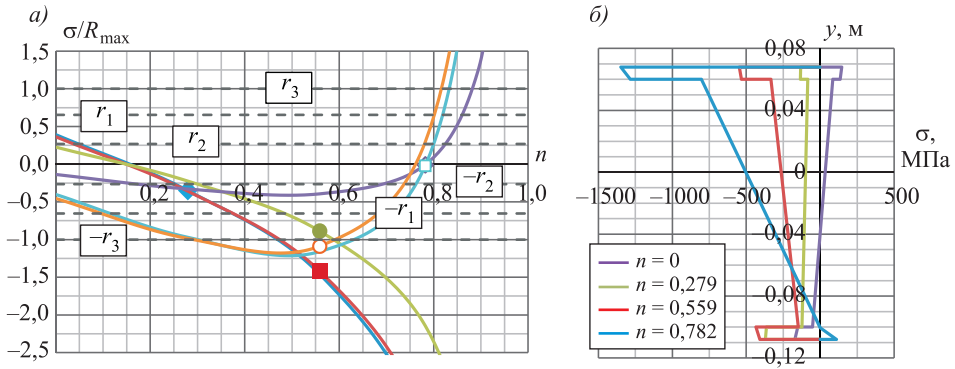


Рис. 5.  $q_{\max} = 20$  кН/м,  $t = 0$ ,  $x = l/2$   
 Усл. обозначения см. на рис. 4

Еще более позднее проявление нелинейности показано на рис. 6 при действии нагрузки с параметром  $q_{\max} = 60$  кН/м. Здесь графики  $\sigma_x(n)$  остаются практически прямыми до значения  $n = 0,75$ . Однако уровень начальных напряжений в этом случае становится недопустимо высоким. Отметим также, что, согласно рис. 3, при данной поперечной нагрузке прогибы стержня будут положительными.

Результаты расчета стержня при действии однородного температурного поля  $t = 80$  °С и продольной нагрузки показаны на рис. 7. В неоднородных стержнях тепловое воздействие приводит к искривлению оси, что в случае их симметрии, играя роль внешнего возмущения, обеспечивает качественное сохранение формы деформирования при любых значениях  $n$  и исключает бифуркацию форм деформирования идеальных систем.

Тепловые напряжения снижают прочностной ресурс конструкции. Так, их максимальный уровень в трех слоях соответственно составил 23,4; -56,0; 43,0 (МПа) или 9,5; 56,0 и 11,5 (%) от соответствующих расчетных сопротивлений, что несомненно следует учитывать при проектировании структурно-неоднородных стержней, испытывающих комплексное внешнее воздействие.

Эффект появления тепловых напряжений определяется различиями в значениях коэффициентов теплового линейного расширения материалов неоднородного стержня [10]. С целью иллюстрации данного эффекта выпол-

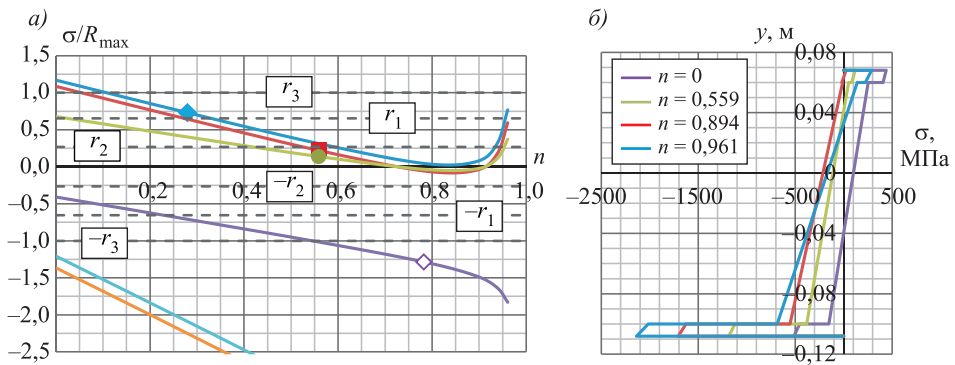


Рис. 6.  $q_{\max} = 60$  кН/м,  $t = 0$ ,  $x = l/2$   
 Усл. обозначения см. на рис. 4



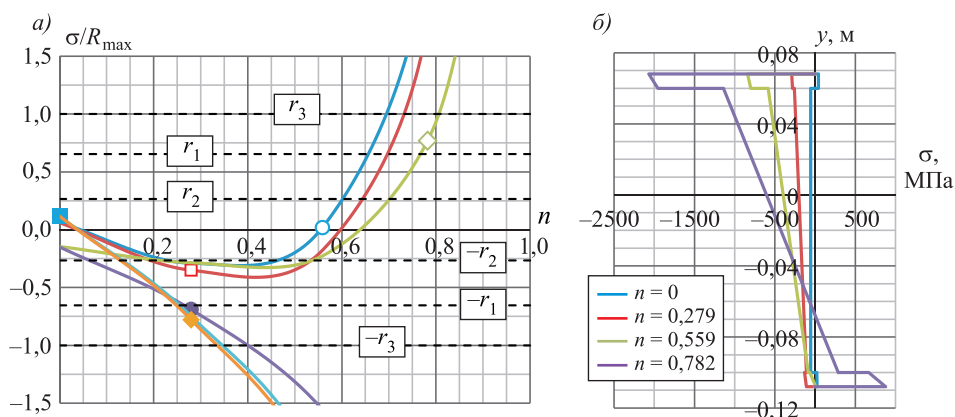


Рис. 7.  $q_{\max} = 0$ ,  $t = 80^\circ\text{C}$ ,  $x = l/2$ . Нормальные напряжения  $\sigma_x(n, y)$  при термосиловом воздействии в шести расчетных точках:

○ – 1, □ – 2, ◇ – 3, ● – 4, ■ – 5, ◆ – 6 (а); эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x(n, y)$  (б)

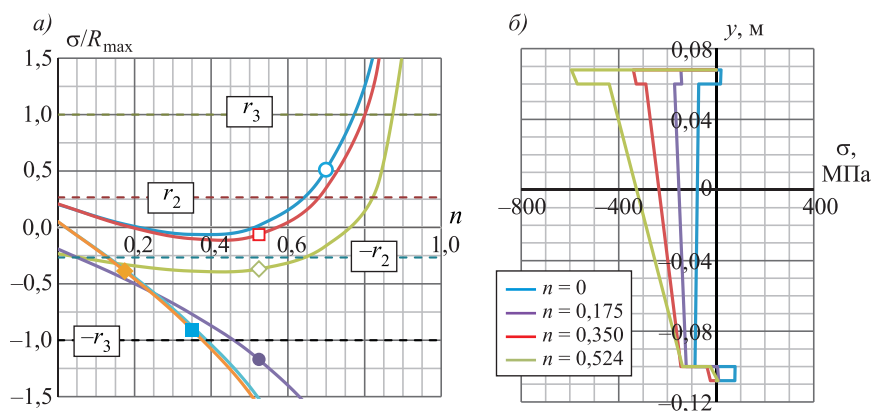


Рис. 8.  $q_{\max} = 0$ ,  $t = 80^\circ\text{C}$ ,  $x = l/2$ . Нормальные напряжения  $\sigma_x(n, y)$  при термосиловом воздействии в структуре У–А–Т в шести расчетных точках:

○ – 1, □ – 2, ◇ – 3, ● – 4, ■ – 5, ◆ – 6 (а); эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x(n, y)$  (б)

ним замену материала первого (нижнего) слоя на углепластик Торнел-300 с характеристиками  $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-6}$  град. $^{-1}$ ,  $E = 140$  ГПа,  $R = 1200$  МПа [6]. Коэффициент  $\alpha$  данного материала имеет значение в 25 раз меньше, чем у стали.

На рис. 8 показаны результаты расчета напряжений для структуры стержня углепластик–алюминий–титан (У–А–Т). Их начальный уровень по сравнению с исходной структурой Ст–А–Т повысился и в 1, 2, 3-м слоях составил 77,6; –87,2; 19,1 (МПа) соответственно.

**Выводы.** 1. В элементах конструкций, имеющих неоднородную структуру, при оценке прочности, необходим учет тепловых напряжений. Наряду с рассмотрением основной компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ , при оценке межслойной прочности следует учитывать и температурные касательные напряжения [10, 11].

2. Для профилированных неоднородных элементов, испытывающих изгиб со сжатием, актуальность учета фактора нелинейности деформирования возрастает.

3. Разработанный подход может быть использован в расчетах элементов структурно-неоднородных стержневых конструкций, в том числе на устойчивость.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тетерс Г.А.* Многоцелевое оптимальное проектирование композитных конструкций. Обзор // *Механика композитных материалов*. 1996. Т. 32. № 3. С. 363–376.
2. *Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.* Композиционные материалы: Справочник / под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. *Горбачев В.И., Москаленко О.Б.* Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой // *Вестн. Моск. ун-та. Серия 1: Математика. Механика*. 2012. № 1. С. 41–47.
4. *Квитко А.В., Орехов А.В., Петров К.В.* Научно-экспериментальное обоснование оптимальных параметров балок пролетных строений военных железнодорожных мостов из композитных материалов // *Тр. Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского*. СПб., 2019. Вып. 699. С. 48–52.
5. *Turusov R.A.* Elastic and Thermal Behavior of a Layered Structure I. Experiment and Theory // *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 50. No. 6. P. 801–808.
6. *Heydarpour A., Andrew M.* Bradford Nonlinear analysis of composite beams with partial interaction in steel frame structures elevated temperature // *J. of Structural Engineering*. 2010. Vol. 136. No. 8. P. 968–978.
7. *Мищенко А.В.* Нелинейное термоупругое деформирование многофазных стержней // *Строит. механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. № 4. С. 42–51.
8. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2008. 304 с.
9. *Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.* Деформирование трехслойного стержня в температурном поле // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2013. № 1 (22). С. 31–35.
10. *Мищенко А.В., Калинин С.А.* Численный анализ температурных полей и напряженно-деформированного состояния слоисто-неоднородных стержней при стационарном тепловом воздействии // *Изв. вузов. Строительство*. 2019. № 9. С. 19–38.
11. *Мищенко А.В.* Напряженное состояние структурно-неоднородных стержней из разномодульных материалов при термосиловом воздействии // *Строит. механика инженерных конструкций и сооружений*. 2016. № 4. С. 43–52.
12. *Gorbachev V.I.* Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section // *Moscow University Mechanics Bulletin*. New York: Allerton Press, Inc. 2017. Vol. 72. No. 2. P. 48–53.

**Мищенко Андрей Викторович**, д-р техн. наук, доц.

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)

**Ромадинов Иван Витальевич**, асп.

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)

Получено после доработки 23.12.2020

**Mishchenko Andrey Viktorovich**, DSc, Ass. Professor

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Russia

**Romadinov Ivan Vitalievich**, Post-graduate Student

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Russia

## **LONGITUDINAL-TRANSVERSE THERMAL FORCE BENDING OF A FLEXIBLE LAYER-INHOMOGENEOUS PROFILED ROD**

The solution to the problem of the stress-strain state of an inhomogeneous profiled rod is based on the use of nonlinear equilibrium conditions and physical relations of a layered thermoelastic rod. The Bubnov–Galerkin procedure is applied with the decomposition of the moving functions in coordinate bases. Numerical calculations of the deformed and stressed states of a layered bar of variable cross-section at given levels of transverse loads and thermal fields with varying longitudinal load have been carried out. The essential influence of the physical structure, the character of the rod profiling and the factor of nonlinearity of the static relations on the stress fields under study have been established.

**Key words:** inhomogeneous rod, layered structure, thermoelasticity, nonlinear deformation, stiffness characteristics, Bubnov–Galerkin method.

### REFERENCES

1. *Teters G.A.* Mnogotselevoye optimal'noye proyektirovaniye kompozitnykh konstruksiy. Obzor [Multipurpose Optimal Composite Design. Review]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. 1996. Vol. 32. No. 3. Pp. 363–376. (in Russian)
2. *Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. and others.* Kompozitsionnyye materialy: Spravochnik [Composite materials: Directory]. Under the general ed. V.V. Vasil'ev, Yu.M. Tarnopol'skiy. Moscow, Mechanical Engineering, 1990. 512 p. (in Russian)
3. *Gorbachev V.I., Moskalenko O.B.* Ustoychivost' sterzhney s peremennoy zhestkost'yu pri szhatii raspredelennoy nagruzkoy [Stability of rods with variable stiffness under compression by a distributed load]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika* [Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics]. 2012. No. 1. Pp. 41–47. (in Russian)
4. *Kvitko A.V., Orekhov A.V., Petrov K.V.* Nauchno-eksperimental'noye obosnovaniye optimal'nykh parametrov balok proletnykh stroyeniy voyennykh zheleznodorozhnykh mostov iz kompozitnykh materialov [Scientific and experimental substantiation of the optimal parameters of the beams of span structures of military railway bridges made of composite materials]. *Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii imeni A.F. Mozhayskogo* [Proceedings of the Military Space Academy A.F. Mozhaisky]. Saint Petersburg, 2019. Iss. 699. Pp. 48–52. (in Russian)
5. *Turusov R.A.* Elastic and Thermal Behavior of a Layered Structure I. Experiment and Theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 50. No. 6. Pp. 801–808.
6. *Heydarpour A., Andrew M.* Bradford Nonlinear analysis of composite beams with partial interaction in steel frame structures elevated temperature. *Journal of Structural Engineering*. 2010. Vol. 136. No. 8. Pp. 968–978.
7. *Mishchenko A.V.* Nelineynoye termouprugoye deformirovaniye mnogofaznykh sterzhney [Non-linear thermoelastic deformation of the multiphase rods]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2014. No. 4. Pp. 42–51. (in Russian)
8. *Kudinov V.A., Averin B.V., Stefanyuk E.V., Nazarenko S.A.* Teploprovodnost' i termouprugost' v mnogosloynnykh konstruksiyakh [Heat conductivity and thermoelasticity in multilayered constructions]. Samara, Samara State Technical University, 2008. 304 p. (in Russian)

9. *Starovoytov E.I., Leonenko D.V.* Deformirovaniye trekhsloynogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of a three-layer rod in a temperature field]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials]. 2013. No. 1 (22). Pp. 31–35. (in Russian)
10. *Mishchenko A.V., Kalinkin S.A.* Chislennyy analiz temperaturnykh poley i napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya sloisto-neodnorodnykh sterzhney pri statsionarnom teplovom vozdeystvii [Numerical analysis of temperature fields and stress-strain state of layered inhomogeneous rods under stationary thermal effect]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2019. No. 9. Pp. 19–38. (in Russian)
11. *Mishchenko A.V.* Napryazhennoye sostoyaniye strukturno-neodnorodnykh sterzhney iz raznomodul'nykh materialov pri termosilovom vozdeystvii [Stress state of structurally not uniform rods made from different module materials under thermo-force influences]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2016. No. 4. Pp. 43–52. (in Russian)
12. *Gorbachev V.I.* Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section. *Moscow University Mechanics Bulletin*. New York, Allerton Press, Inc. 2017. Vol. 72. No. 2. Pp. 48–53.

