СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИЗДЕЛИЯ

УДК 691.3.001

В.Т. ЕРОФЕЕВ, А.С. ТЮРЯХИН, Т.П. ТЮРЯХИНА

СИСТЕМА УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ЗНАЧЕНИЙ ОБЪЕМНОГО МОДУЛЯ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ КОМПОЗИТОВ СО СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

В настоящее время для создания новых полимерных композиционных материалов наряду с экспериментальными широко применяются и теоретические исследования. В данной работе с помощью математического моделирования состояния тела рассматривается представительный объем в виде сферической модели. Формула Р. Кристенсена для объемного модуля полидисперсных композитов со сферическими включениями преобразуется в функцию трех безразмерных параметров, удобную для численного исследования. В результате установлено, что бесчисленное множество решений, даваемых названной формулой, сводится к системе таких упорядоченных подмножеств, которые могут быть наглядно представлены фигурами в плоском пространстве. Это существенно расширяет возможности экспериментальной проверки прогнозируемых свойств композитов.

К л ю ч е в ы е с л о в а: полидисперсные композиты, представительный объем композита, объемные модули упругости, модуль сдвига матрицы, объемные доли включения и матрицы.

DOI 10.32683/0536-1052-2019-726-6-5-17

Введение. Композиционные материалы (композиты) – это материалы, в которых число составляющих компонентов (фаз) не менее двух; последние имеют связующую (матрицу) и усиливающие элементы (наполнитель) из более или менее прочного материала. Комбинируя состав компонентов, их объемное содержание и газовую составляющую (пористость), можно получить композиционные материалы, в том числе изготавливаемые посредством биотехнологий с требуемыми значениями прочности, модуля упругости, жаропрочности, абразивной, демпфирующей стойкости и другими свойства-

[1] Публикуется при поддержке гранта РФФИ РМ № 18-48-130013 «Комплексное исследование физико-химических процессов в композиционных материалах на основе эпоксидных смол и других синтетических полимеров, перспективных для применения в строительстве».

© **Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Тюряхина Т.П., 2019**

ми [1–6]. В настоящее время наблюдается стремительный рост производства полимерных композитов, проникновение их в самые различные области техники, успешное вытеснение ими многих традиционных материалов: металлов, керамики, стекла, древесины и так называемых «чистых», т.е. ненаполненных полимеров. Потребности развития композитов стимулируют их теоретическое постижение [1, 7–9].

1. Актуальность проблемы и постановка задачи. В связи с развитием вычислительной техники резко возросла роль математического моделирования как средства изучения явлений и процессов в жидких, газовых, пластичных средах, твердых телах и в том числе в бетонах и других композиционных материалах [2, 10, 11]. Усилия теоретиков сосредоточены на расчетах механических свойств композитов и некоторых физико-химических свойств [1, 7, 12]. Для статистического описания состояния тела рассматриваются представительные объемы с минимальным объемом материала, в котором содержится достаточное число носителей механизмов процесса. В механике материалов для представительного объема композита часто используются сферические модели (эффективные и структурные) [13].

Формула для вычисления величины объемного модуля упругости полидисперсных композитов со сферическими включениями получена Р.М. Кристенсеном [10] методами линейной теории упругости в рамках парадигмы Хашина [13]. В наших обозначениях, использованных в работах [14–17], обсуждаемая формула имеет следующий вид

$$\frac{K-K_{\text{м}}}{K_{\text{вк}}-K_{\text{м}}}=\frac{w}{1+\dfrac{(1-w)(K_{\text{вк}}-K_{\text{м}})}{K_{\text{м}}+\dfrac{4}{3}G_{\text{м}}}}. \qquad (1)$$

В этой формуле $K_{\text{м}}$ – объемный модуль материала матрицы;
$K_{\text{вк}}$ – объемный модуль включения;
$G_{\text{м}}$ – модуль сдвига матрицы;
w – объемная доля включения ($w = a^3/R^3$), где a и R – радиусы внутренней и наружной сферических поверхностей матрицы (в представительном объеме сферической модели композита).

Формула (1) безупречна с математической точки зрения, но неудобна для ее численного анализа с целью выявления физического смысла частных случаев формулы и возможности их практического применения. Поэтому преобразуем размерные величины исходной формулы ($K_{\text{м}}$, $G_{\text{м}}$, $K_{\text{вк}}$ и K) в два безразмерных параметра:

$$\eta=\frac{2G_{\text{м}}}{3K_{\text{м}}} \quad \text{и} \quad \theta=\frac{K_{\text{м}}}{K_{\text{вк}}}, \qquad (2)$$

а размерную функцию четырех параметров $K=K(K_{\text{м}},G_{\text{м}},K_{\text{вк}},w)$ – в две безразмерные функции трех параметров – $k=k(\eta_{\text{м}},\theta,w)$ и $\varphi=\varphi(\eta_{\text{м}},\theta,w)$:

$$k=\frac{K}{K_{\text{м}}}, \quad \varphi=\frac{1}{k}. \qquad (3)$$

Результат преобразования после подстановки значений (2) и (3) в формулу (1) дает две взаимно обратные функции:

$$k = \frac{(1+2\eta_{\text{м}}w)+2\eta_{\text{м}}\theta V}{V+\theta(2\eta_{\text{м}}+w)} = \frac{1}{\varphi}, \tag{4}$$

$$\varphi = \frac{V+\theta(2\eta_{\text{м}}+w)}{1+2\eta_{\text{м}}w+2\eta_{\text{м}}\theta V} = \frac{1}{k}, \tag{5}$$

где k – есть модуль K композита, выраженный в долях от модуля матрицы $K_{\text{м}}$; V – объемная доля матрицы ($V = 1 - w$).

Теперь, вместо формулы (1) предметом нашего исследования становится идентичная ей функция (4). Благодаря использованию функции (5), играющей вспомогательную роль, математическое (и физическое) описание формулы (4) получается более выразительным. Задача заключается в том, чтобы некоторое (труднообозримое) множество значений модуля K, даваемых формулой (1), представить системой упорядоченных подмножеств значений k, в которых их обозримость становится математически (и графически) очевидной.

2. Инверсивные свойства параметра θ и функции *k*. Параметры w, η, θ, согласно их определениям, изменяются в интервалах чисел:

$$0 < w < 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad 0 < \theta < \infty. \tag{6}$$

Интервал θ целесообразно разделить на интервалы:

$$0 < \theta_1 < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \theta_2 < \infty, \tag{7}$$

в которых параметр $\theta = \theta_1 < 1$ и $\theta = \theta_2 > 1$. Значению же $\theta = 1$ отвечает общий предел значений как для θ_1, так и для θ_2.

Для наглядности излагаемого материала введем плоское пространство, точки которого отображают значения функций $\varphi(w)$ и $k(w)$ при заданных величинах η и θ. В этом пространстве выделим начальную (нулевую) точку из нее, как из начала, построим ось абсцисс (ось w) и ось ординат (совмещенные оси k и φ) (рис. 1). Кроме того, из точки $w = 1$ построим вторую ось ординат (для значений θ). И, наконец, в названном пространстве выделим (линиями координатной сетки) область, ограниченную осями w, k и θ. В этой области плоского пространства мы будем располагать точки всех упорядоченных подмножеств из множества значений функций k и φ, определяемых формулами (4) и (5).

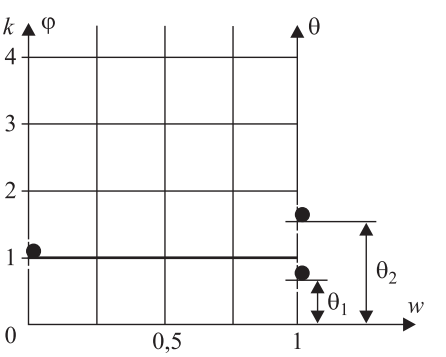


Рис. 1. Ограниченная осями k, θ и w область плоского пространства $k - w$, где располагаются точки с координатами значений функций $k(w)$ и $\varphi(w)$ при всех возможных сочетаниях значений $\eta_{\text{м}}$ и θ

Однако предварительно рассмотрим предельные случаи функций k и φ, соответствующие числам, ограничивающим параметры θ_1, θ_2, $\eta_{\text{м}}$ и w в интервалах их значений (6) и (7).

Случай 1, при котором параметр $\theta = 1$. Тогда все значения функций (4) и (5) будут равны единице:

$$k|_{\theta=1} = 1 = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi|_{\theta=1} = 1 = \text{const}.$$

Это такой вырожденный случай двухфазного композита, при котором модули включения и матрицы равны ($K_{вк} = K_{м}$). Например, когда мы имеем однородную шарообразную матрицу без включения. Такому случаю отвечает упорядоченное подмножество точек горизонтального отрезка прямой, выделенного жирной линией (см. рис. 1).

Случай 2, при котором объемная доля включения предельно мала ($w \to 0$). Тогда из формул (4) и (5) следует, что $k|_{w=0} = \varphi|_{w=0} = 1$ при абсолютно всех значениях $\eta_{м}$ и θ. Данному случаю соответствует жирная точка, выделенная на оси k (см. рис. 1). Другими словами, эта точка является общей левой границей для всех областей расположения точек подмножеств в их общем плоском пространстве.

Прежде чем перейти к случаю 3, отметим, что параметры θ_1 и θ_2 обладают свойством инверсии, т.е. такого преобразования, при котором выполняется равенство $\theta_1\theta_2 = 1 = \text{const}$. При этом каждая точка $\theta = \theta_1$ отображается в точку $\theta = \theta_2$ на оси θ (см. рис. 1). Справедливо и обратное свойство – отображение точки $\theta = \theta_2$ в точку $\theta = \theta_1$.

Случай 3, когда $w \to 1$, реализуется в двух вариантах:

1) при условии, что модуль матрицы меньше модуля включения ($K_{м} < K_{вк}$), т. е. если $\theta = \theta_1 < 1$; тогда из формул (4), (5) следует, что:

$$\varphi|_{w=1} = \theta_1 \quad \text{и} \quad k|_{w=1} = \frac{1}{\theta_1} = \theta_2. \tag{8}$$

На оси θ вариант 1 обозначен двумя жирными точками (см. рис. 1). Два множества таких точек (θ_1 и θ_2) дают нам правые границы областей для значений системы подмножеств функций (4) во внешнем плоском пространстве и функции (5) – во внутреннем плоском пространстве (см. далее таблицу на рис. 3);

2) при условии $K_{м} > K_{вк}$, т. е. когда $\theta = \theta_2 > 1$, из (4) и (5)

$$k|_{w=1} = \frac{1}{\theta_2} = \theta_1 \quad \text{и} \quad \varphi|_{w=1} = \theta_2. \tag{9}$$

Из выражений (9) следует, что две названные выше точки взаимно отображаются (по правилу инверсии), т. е. взаимно изменяется их положение на оси θ.

Подводя итоги параграфу, отметим, что инверсивные свойства ординат функций k и φ проявляются как следствие таковых свойств, которыми обладают параметры θ_1 и θ_2. При этом нулевые значения ординат (на оси w) играют роль центров инверсии; точки со значениями $k|_{\theta=1} = 1$ и $\varphi|_{\theta=1} = 1$ (случай 1) преобразуются сами в себя; значения $\varphi(\theta_1)$ преобразуются в значения $k(\theta_2)$.

Случай 4, при котором $\theta = 0$, подлежит отдельному рассмотрению.

3. Модули композитов с недеформируемым включением. Рассмотрим 4-й предельный (вырожденный) случай для значений объемного модуля

$k(\eta_м, \theta, w)$, в котором параметр $\theta = 0$, при этом формулы (4) и (5) упростятся и примут вид:

$$k_0 = \frac{1+2\eta_м w}{V} = \frac{1}{\varphi_0}, \quad \varphi_0 = \frac{V}{1+2\eta_м w}. \tag{10}$$

Следовательно, функции k и φ вырождаются и становятся в формулах (10) функциями двух параметров $k_0(\eta_м, w)$ и $\varphi_0(\eta_м, w)$.

Второе из выражений (10) в работе [10] было получено для случая, в котором роль недеформируемого включения отводилась идеальной жидкости. В данном же исследовании функция φ_0 соответствует композиту, в котором упругий материал включения вырождается и становится несжимаемым (абсолютно жестким), т.е. здесь функция φ_0 явлена как частный случай выражения (5). Стало быть решение (10) для композитов с абсолютно жестким включением будет составной частью более общего решения (4) – для композитов с упругим включением. Этот факт говорит о том, что абсолютная «несжимаемость» включения не есть «голая» абстракция и является реальным пределом, к которому сводится решение для матрицы с включением из упругого материала.

Другими словами, упрощенное решение (10) проявляет себя как базовая основа более сложного решения (4), поэтому названной основе уделим более пристальное внимание. С этой целью предварительно выполним численный анализ названных выражений. Результат анализа представим графиками зависимости функций k_0 и φ_0 от параметра w для трех значений параметра $\eta_м$ (рис. 2).

На нижней фигуре верхний прямолинейный график соответствует наибольшим значениям функции

$$\varphi_0^{\max}(\eta = 0, w) = 1 - w = V. \tag{11}$$

Нижний график отвечает наименьшим значениям той же функции

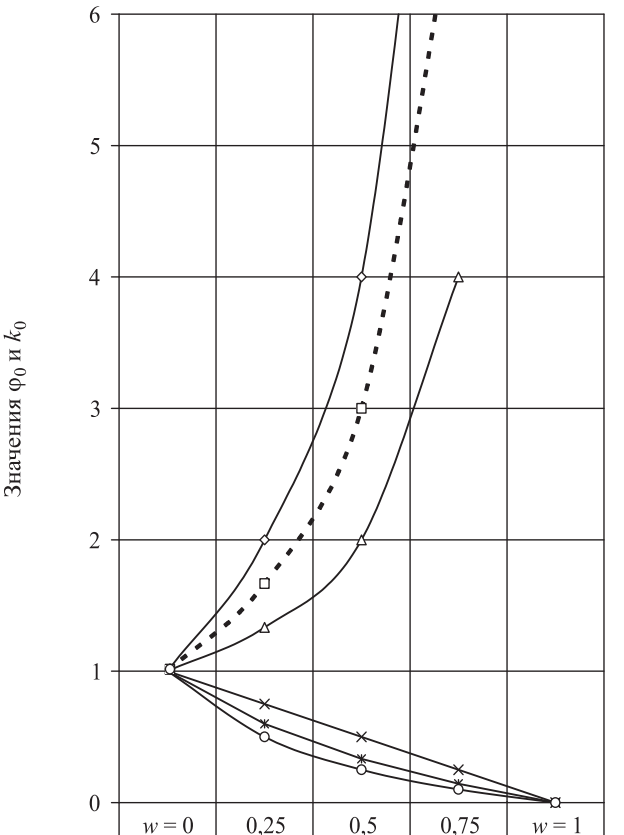
$$\varphi_0^{\min}(\eta = 1, w) = \frac{1-w}{1+2w} = \frac{V}{1+2w}. \tag{12}$$

При этом, если $w \to 0$, то значения $\varphi_0^{\max} = \varphi_0^{\min} = 1$. Если же $w \to 1$, то $\varphi_0^{\max} = \varphi_0 = 0$, т.е. оба графика сходятся на своих концах и тем самым ограничивают собой конечную область значений функции φ_0.

Очевидная обозримость этой области (значений φ_0) позволяет мысленно обозреть и область значений объемных модулей k_0 (см. рис. 2, верхняя фигура). При этом нижняя ее граница определяется функцией

$$k_0^{\min}(\eta = 0, w) = \frac{1}{\varphi_0^{\max}} = \frac{1}{V} \quad \text{или} \quad K_0^{\min}(\eta = 0, w) = \frac{K_м}{1-w}. \tag{13}$$

Т.е. на нижней границе области минимальные значения $K_{к0}^{\min}$ прямо пропорциональны величине объемного модуля матрицы $K_м$ и обратно пропорциональны величине объемной доли V этой матрицы. Такому случаю отвечает, например, материал матрицы, у которого величина модуля сдвига близка к нулевому значению ($G_м \to 0$).



	$w=0$	0,25	0,5	0,75	$w=1$
$k_0\,\eta=1$	1	2	4	10	
$k_0\,\eta=1/2$	1	1,66667	3	7	
$k_0\,\eta=0$	1	1,33333	2	4	
$\varphi_0\,\eta=0$	1	0,75	0,5	0,25	0
$\varphi_0\,\eta=1/2$	1	0,6	0,33333	0,14286	0
$\varphi_0\,\eta=1$	1	0,5	0,25	0,1	0

Рис. 2. Фигуры двух областей, расположенных в пространств $k - w$ для значений функций k_0 и φ_0. Фигурные области ограничены (сверху и снизу) графиками этих функций при значениях $\eta_м = 0$ и $\eta_м = 1$.

Точкам со значениями $\eta_м = 1/2$ соответствуют графики, выделенные штриховыми линиями

Верхняя граница области (значений k_0) определяется функцией

$$k_0^{\max}(\eta=1,w)=\frac{1}{\varphi_0^{\min}} \quad \text{или} \quad K_0^{\max}(\eta=1,w)=K_м\frac{(1+2w)}{V}. \tag{14}$$

В точке с абсциссой $w = 0$ ординаты функций $k_0(\eta_м, w)$ и $\varphi_0(\eta_м, w)$, равные единице, совпадают и дают левые границы фигур k_0 и φ_0.

Однако правая граница на верхней фигуре (k_0) отсутствует (см. рис. 2), так как в точке с абсциссой $w = 1$ ордината функции φ_0 равна нулю, т.е. является центром инверсии и не имеет образа, так как

$$k_0 = \frac{1}{\varphi_0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Более четко физический смысл формул (10)–(14) проявляется после преобразования первого из выражений (10), из которого следует:

$$K_0 = k_0 K_{\text{м}} = K_{\text{м}} \frac{1+2\eta_{\text{м}} w}{V} = \frac{K_{\text{м}} + \frac{4}{3} w G_{\text{м}}}{V}. \qquad (15)$$

Отсюда видно, что величина модуля композита K_0 зависит не только от величины объемного модуля матрицы $K_{\text{м}}$, но и от величины модуля сдвига матрицы $G_{\text{м}}$. Точнее, в композитах с жестким включением модуль $K_{\text{м}}$ прямо пропорционален сумме модулей матрицы $\left(K_{\text{м}} + \frac{4}{3} G_{\text{м}} w \right)$, в которой второе слагаемое содержит множитель $\frac{4}{3} w$, и обратно пропорционален объемной доле (V) матрицы.

Например, если объемные доли матрицы и включения равны ($w = V = 0{,}5$), то, согласно (15), получим простую формулу

$$K_0 = 2K_{\text{м}} + 4G_{\text{м}}/3. \qquad (16)$$

Эта формула удобна в практическом плане для предварительной (прикидочной) оценки величины модуля композита с жестким включением.

В заключение отметим, что его содержание дает нам только одно (вполне упорядоченное) подмножество значений модуля $k = k_0$ в бесконечном ряду других подмножеств, следующих из формулы (4). Но подмножество k_0, в свою очередь, служит основой для построения системы других подмножеств решений, даваемых той же формулой при $\theta \neq 0$.

4. Модули композитов с упругим включением. Исключив значение $\theta = 1$ (см. случай 1), мы расчленяем интервал значений θ на интервалы θ_1, θ_2 и вместо одной системы подмножеств значений модуля k, определяемой выражением (4), получаем две системы подмножеств значений модулей k_1 и k_2:

$$k_1 = \frac{(1+2\eta_{\text{м}} w) + 2\eta_{\text{м}} \theta_1 V}{V + \theta_1 (2\eta_{\text{м}} + w)} = \frac{1}{\varphi_1}, \qquad (17)$$

$$k_2 = \frac{(1+2\eta_{\text{м}} w) + 2\eta_{\text{м}} \theta_2 V}{V + \theta_2 (2\eta_{\text{м}} + w)} = \frac{1}{\varphi_2}, \qquad (18)$$

в которых, согласно (4):

$$\varphi_1 = \frac{V + \theta_1 (2\eta_{\text{м}} + w)}{1 + 2\eta_{\text{м}} w + 2\eta_{\text{м}} \theta_1 V} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{V + \theta_2 (2\eta_{\text{м}} + w)}{1 + 2\eta_{\text{м}} w + 2\eta_{\text{м}} \theta_2 V}. \qquad (19)$$

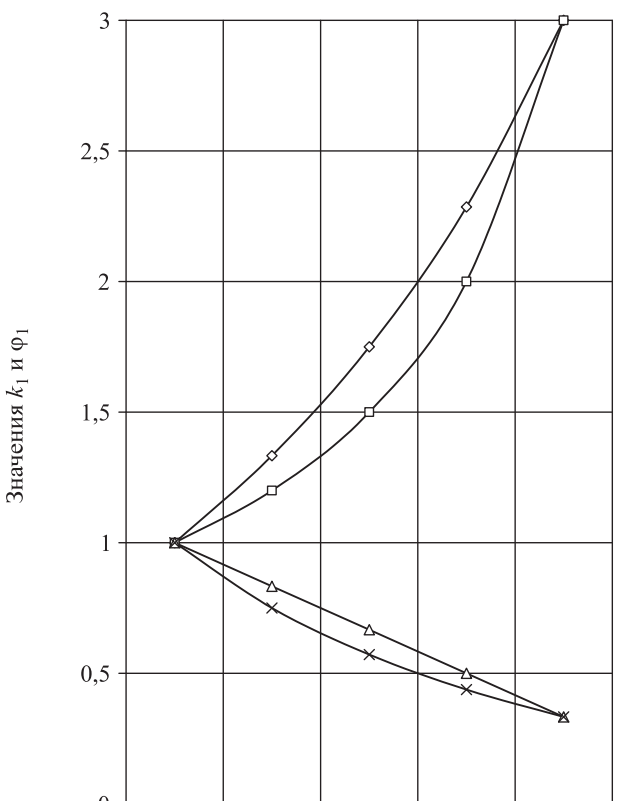
Поочередно рассмотрим эти две системы.

А. Модули k_1 композитов, у которых модуль матрицы $K_{\text{м}} < K_{\text{вк}}$. В данной системе упорядоченных подмножеств значений k_1 параметр

$\theta = \theta_1 < 1$. Численное исследование функций k_1 и φ_1, определяемых формулами (17) и (19), выполним для конкретного подмножества k_1, в котором величина $\theta_1 = 1/3$ (рис. 3).

Плоская фигура области значений $k_1(\eta_м, w)$ расположена в верхней части пространства $k_1 - w$ и ограничена сверху отрезком кривой $k_1(\eta_м = 1, w)$ (см. строку 1 таблицы на рис. 3), снизу отрезком кривой $k_1(\eta_м = 0, w)$ (см. строку 2 там же).

Если величина параметра θ будет меньше значения $\theta_1 = 1/3$, то величина θ_2 будет расти. При этом размеры обсуждаемой плоской фигуры будут увеличиваться и фигура в целом будет поворачиваться вверх и влево относительно своей левой неподвижной точки. При таких изменениях размеров, формы и положения фигура (модулей k_1) пройдет все промежуточные положения (своих подмножеств) и в предельном случае, когда θ_1 будет равным 0, фигура k_1 выродится в фигуру k_0 (см. рис. 2).



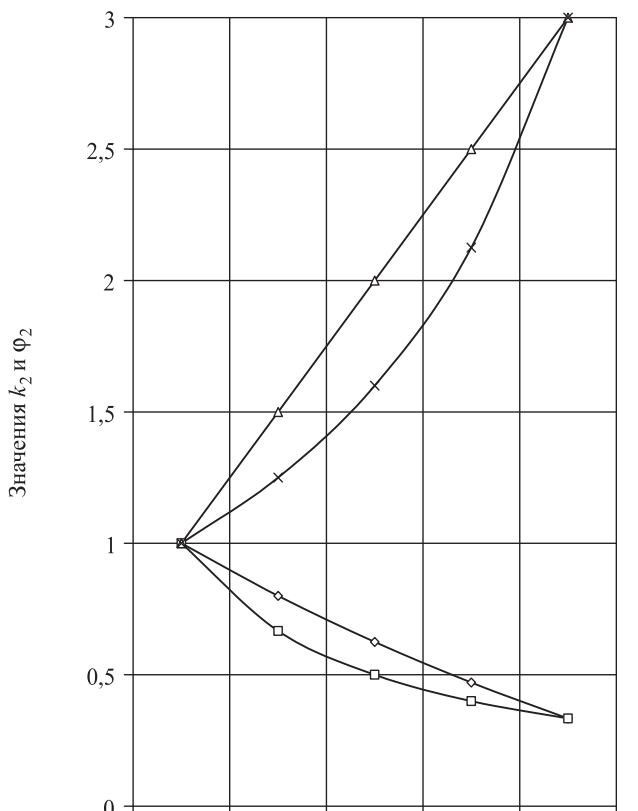
	$w = 0$	0,25	0,5	0,75	$w = 1$
$k_1\ \eta = 1$	1	1,333333	1,75	2,285714	3
$k_1\ \eta = 0$	1	1,2	1,5	2	3
$\varphi_1 = \eta = 0$	1	0,833333	0,666667	0,5	0,333333
$\varphi_1 = \eta = 1$	1	0,75	0,571429	0,4375	0,333333

Рис. 3. Две фигуры областей (в плоском пространстве $k - w$) для подмножеств значений функций k_1 и φ_1, ограниченных (сверху и снизу) графиками этих функций при $\eta_м = 0$ и $\eta_м = 1$

И наоборот, если параметр θ становится выше значения $\theta_1 = 1/3$, то величина θ_2 уменьшается; фигура k_1 при этом совершит поворот вправо, сокращая свои размеры. Одновременно верхняя и нижняя границы области будут сближаться. В предельном случае, когда $\theta_1 = 1$, эти границы совпадут в горизонтальном отрезке прямой линии значений $k|_{\theta=1} = 1 = \text{const}$ (см. случай 1 и рис. 1).

Итак, теперь мы имеем достаточно полное описание картины расположения фигурных областей (в пространстве осей k и w) для первой системы бесконечного числа упорядоченных подмножеств значений объемных модулей k_1 композитов (см. рис. 3), у которых отношение модулей $K_м/K_{вк} < 1$.

Б. Модули k_2 композитов, у которых модуль матрицы $K_м > K_{вк}$. Вторая система упорядоченных подмножеств охватывает композиты, в которых значения $\theta = \theta_2 > 1$. Численное исследование значений модуля k_2 и функции φ_2, определяемых формулами (18) и (19), выполним на примере подмножества значений k_2, в котором величина $\theta_2 = 3$ (рис. 4).



	$w = 0$	0,25	0,5	0,75	$w = 1$
$k_2\ \eta=1$	1	0,8	0,625	0,470588	0,333333
$k_2\ \eta=0$	1	0,666667	0,5	0,4	0,333333
$\varphi_2\ \eta=0$	1	1,5	2	2,5	3
$\varphi_2\ \eta=1$	1	1,25	1,6	2,125	3

Рис. 4. Фигуры областей (в пространстве $k - w$) для подмножеств значений функции φ_2 (верхняя фигура) и k_2 (нижняя фигура). Фигуры ограничены (сверху и снизу) графиками функций, соответствующих предельным значениям параметра матрицы: $\eta_м = 0$ и $\eta_м = 1$

В данном примере, в отличие от первого (см. рис. 3), фигура области значений модуля k_2 расположена в нижней части плоского пространства $k - w$ и ограничена (сверху и снизу) отрезками кривых линий $k_2(\eta_м = 1, w)$ и $k_2(\eta_м = 0, w)$ (см. строки 1 и 2 таблицы на рис. 4).

Если теперь в формулах (18) и (19) мы будем полагать значения $\theta_2 < 3$, то величина θ_1 будет расти. При этом размеры фигуры k_2 будут уменьшаться, а сама фигура будет поворачиваться влево относительно левой неподвижной ее точки. При этом фигура k_2 пройдет все промежуточные положения и в предельном случае, когда θ_2 будет равным 1, фигура k_2 выродится в прямолинейный отрезок значений $k|_{\theta=1} = 1 = \text{const}$ (см. рис. 1).

Если же значения будут расти ($\theta_2 > 3$), то θ_1 будет меньше 1/3. При этом фигура, совершая поворот вправо, увеличит свои размеры. В предельном случае, когда $\theta_1 = 0$, фигура k_2 займет положение фигуры φ_0 (см. рис. 2).

На этом закончим описание картины расположения фигурных областей значений подмножеств k_2 (в пространстве $k - w$) и завершим описание второй системы бесконечного числа упорядоченных подмножеств значений модулей k_2 (см. рис. 4).

5. Заключение. Анализ значений объемного модуля K в полидисперсных композитах со сферическими включениями, определяемых формулой (1), показал, что для исследований бесконечного множества значений этого модуля целесообразно перейти к рассмотрению безразмерных функций k и φ – функций трех безразмерных параметров. Численное исследование формул (4) и (5) выявило возможность графического представления функций k и φ в плоском пространстве ($k - w$). Значениями $k|_{\theta=1} = 1 = \text{const}$ это пространство разделено на внутреннее (нижнее) и внешнее (верхнее).

При значениях $\theta = 0$ формулы (4) и (5) сводятся к двум вырожденным формулам (10), представленным в том же пространстве $k - w$ фигурами k_0 и φ_0. Контуры этих фигур ограничивают области расположения точек, отображающих значения модулей k_0 для двух упорядоченных подмножеств вырожденных композитов (с недеформируемыми включениями). При этом верхняя фигура отображает (при заданных значениях модулей матрицы) максимально высокие значения модуля $k(\eta, \theta, w)$, нижняя фигура – максимально низкие значения этого модуля.

Пространство между фигурами k_0 и φ_0 предназначено для размещения фигурных областей для значений модулей $k(\eta, \theta, w)$ композитов, в которых величина θ отлична от нуля. Фигуры таких композитов (с упругими включениями) сплошно заполняют названное промежуточное пространство.

Графическая обозримость решений, даваемых формулами (4), (5) и (10), существенно расширяет рамки прикладного использования этих формул. Появляется реальная возможность постановки целенаправленных экспериментальных исследований (механических испытаний на сжатие образцов композита стандартных размеров) для подтверждения прогнозируемых свойств композитов. При этом отпадает необходимость физических аналогий, которые были использованы авторами работы [16].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бобрышев А.Н., Ерофеев В.Т., Козомазов В.Н. Физика и синергетика дисперсно-неупорядоченных конденсированных композитных систем. СПб.: Наука, 2012. 176 с.
2. Ерофеев В.Т., Меркулов И.И., Меркулов А.И., Ерофеев П.С. Оптимизация составов бетонов с применением численного моделирования. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2006. 100 с.
3. Travush V.I., Karpenko N.I., Erofeev V.T., Erofeeva I.V., Bondarev B.A., Bondarev A.V., Seleznev V.A. Cyclic strength of new generation concrete // International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET). 2019. Vol. 10, Iss. 5. P. 1070–1077.
4. Патуроев В.В. Полимербетоны / НИИ бетона и железобетона. М.: Стройиздат, 1987. 286 с.
5. Елшин И.М. Полимербетоны в гидротехническом строительстве. М.: Стройиздат, 1980. 192 с.
6. Липатов Ю.С. Физико-химия наполненных полимеров. М.: Химия, 1977. 304 с.
7. Бартенев Г.М. Прочность и механика разрушения полимеров. М.: Химия, 1984. 280 с.
8. Гусев Б.В., Зазимко В.Г., Нетеса Н.И. Исследование напряженно-деформированного состояния композитов с использованием метода конечных элементов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1981. № 8. С. 13–16.
9. Амбарцумян С.А. Равномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
10. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
11. Выровой В.Н., Дорофеев В.С., Суханов В.Г. Композиционные строительные материалы и конструкции. Структура, самоорганизация, свойства. Одесса: Изд-во Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры, 2010. 168 с.
12. Гуль В.Е. Структура и прочность полимеров. М.: Химия, 1978. 328 с.
13. Hashin Z. The elastic moduli of heterogeneous materials // J. Appl. Mech. 1962. Vol. 1. P. 143 [Имеется перевод: Прикладная механика. М.: Мир, 1962, № 1. С. 159–167].
14. Ерофеев В.Т., Тюряхин А.С., Смирнов И.В., Максимова И.Н. Оптимальный состав композита по критерию его прочности // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3. С. 6–15.
15. Ерофеев В.Т, Тюряхин А.С., Ерофеева И.В. О связях параметров несущей фазы с эффективными параметрами в моделях зернистых композитов // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 3. С. 7–17.
16. Соломатов В.И., Черкасов В.Д., Тюряхин А.С., Юркин Ю.В. Объемные модули упругости двухсвязной модели композита // Изв. вузов. Строительство. 2001. № 4. С. 43–48.
17. Черкасов В.Д., Тюряхин А.С. Теория двухсвязных моделей микромеханики композитов: моногр. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2009. 108 с.

Ерофеев Владимир Трофимович, д-р техн. наук, проф.
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск
Тюряхин Алексей Сергеевич, канд. техн. наук, доц.
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск
Тюряхина Татьяна Павловна, асп.
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, г. Саранск

Получено 16.05.2019

Erofeev Vladimir Trofimovich, DSc, Professor
National Research Mordovia State University, Saransk, Russia
Tyuryahin Aleksej Sergeevich, PhD, Ass. Professor
National Research Mordovia State University, Saransk, Russia
Tyuryahina Tat'yana Pavlovna, Post-graduate Student
National Research Mordovia State University, Saransk, Russia

SYSTEM OF ORDERED SUBSETS VALUES OF THE VOLUME MODULE OF POLYDISPERSE COMPOSITES WITH SPHERICAL INCLUSIONS

Theoretical studies are now widely used to create new polymer composites along with experimental ones. In this work, using mathematical modeling of the state of the body, a representative volume in the form of a spherical model is considered. In the real researches for the statistical description of a condition of a body representative volume in the form of spherical model is considered. R. Christensen formula for the volume module of polydisperse composites with spherical inclusions will be transformed to the function of three dimensionless parameters convenient for its numerical research. As a result of researches it is revealed that the infinite number of the decisions given by the called formula comes down to the system of such ordered subsets which can be visually presented by figures in flat space. It significantly expands possibilities of experimental check of the predicted properties of composites.

K e y w o r d s: polydisperse composites, representative volume of a composite, volume modules of elasticity, module of shift of a matrix, volume fractions of inclusion and matrix.

REFERENCES

1. B o b r y s h e v A.N., E r o f e e v V.T., K o z o m a z o v V.N. Fizika i sinergetika dispersno-neuporyadochennykh kondensirovannykh kompozitnykh sistem [Physics and synergistics of dispersed-disordered condensed composite systems]. St. Petersburg, 2012. 176 p. (in Russian)
2. E r o f e e v V.T., M e r k u l o v I.I., M e r k u l o v A.I., E r o f e e v P.S. Optimizatsiya sostavov betonov s primeneniem chislennogo modelirovaniya [Optimizes concrete compositions using numerical modeling]. Saransk, 2006. 100 p. (in Russian)
3. T r a v u s h V.I., K a r p e n k o N.I., E r o f e e v V.T., E r o f e e v a I.V., B o n d a r e v B.A., B o n d a r e v A.V., S e l e z n e v V.A. Cyclic strength of new generation concrete. International Journal of Civil Engineering and Technology (IJCIET). 2019. Vol. 10, Iss. 5. Pp.1070–1077.
4. P a t u r o e v V.V. Polimerbetony [Polymeric concrete]. Moscow, 1987. 286 p. (in Russian)
5. E l s h i n I.M. Polimerbetony v gidrotekhnicheskom stroitel'stve [Polymer concrete in hydrotechnical construction]. Moscow, 1980. 192 p. (in Russian)
6. L i p a t o v Yu.S. Fiziko-khimiya napolnennykh polimerov [Physical chemistry of filled polymers]. Moscow, 1977. 304 p. (in Russian)
7. B a r t e n e v G.M. Prochnost' i mekhanika razrusheniya polimerov [Polymer fracture strength and mechanics]. Moscow, 1984. 280 p. (in Russian)
8. G u s e v B.V., Z a z i m k o V.G., N e t e s a N.I. Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kompozitov s ispol'zovaniem metoda konechnykh elementov [Study of stress-strain state of composites using finite element method]. Izv. vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura [News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture]. 1981. No. 8. Pp. 13–16. (in Russian)

9. A m b a r c u m y a n S.A. Ravnomodul'naya teoriya uprugosti [Equal modulus theory of elasticity]. Moscow, 1982. 320 p. (in Russian)
10. K r i s t e n s e n R.M. Vvedenie v mekhaniku kompozitov [Introduction of composites to mechanics]. Moscow, 1982. 336 p. (in Russian)
11. V y r o v o j V.N., D o r o f e e v V.S., S u h a n o v V.G. Kompozitsionnye stroitel'nye materialy i konstruktsii. Struktura, samoorganizatsiya, svoystva [Composite building materials and construction. Structure, self-organization, properties.]. Odessa, 2010. 168 p. (in Russian)
12. G u l' V.E. Struktura i prochnost' polimerov [Polymer structure and strength]. Moscow, 1978. 328 p. (in Russian)
13. H a s h i n Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. J. Appl. Mech. 1962. Vol. 1. P. 143.
14. E r o f e e v V.T., T y u r y a h i n A.S., S m i r n o v I.V., M a k s i m o v a I.N. Optimal'nyy sostav kompozita po kriteriyu ego prochnosti [Optimal composition of composite according to its strength criterion]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2016. No. 3. Pp. 6–15. (in Russian)
15. E r o f e e v V.T., T y u r y a h i n A.S., E r o f e e v a I.V. O svyazyakh parametrov nesushchey fazy s effektivnymi parametrami v modelyakh zernistykh kompozitov [About the relationship of carrier phase parameters to effective parameters in grain composite models]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2018. No. 3. Pp. 7–17. (in Russian)
16. S o l o m a t o v V.I., C h e r k a s o v V.D., T y u r y a h i n A.S., Y u r k i n Yu.V. Ob''emnye moduli uprugosti dvukhsvyaznoy modeli kompozita [Three-dimensional elastic modulus of two-bond composite model]. Izv. vuzov. Stroitel'stvo [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2001. No. 4. Pp. 43–48. (in Russian)
17. C h e r k a s o v V.D., T y u r y a h i n A.S. Teoriya dvukhsvyaznykh modeley mikromekhaniki kompozitov: monografiya [Theory of two-bond models of composite micromechanical]. Saransk, 2009. 108 p. (in Russian)