

УДК 624.04:519.6

В.А. ИГНАТЬЕВ, А.В. ИГНАТЬЕВ, М.И. БОЧКОВ

## БАЗОВЫЙ УНИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Рассмотрены задачи статики систем с односторонними связями. Предложена обобщенная физическая модель такой системы в виде многопролетной балки с односторонними опорными связями, работающими только на сжатие. Детально описано построение соответствующей математической модели на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода. Подробно изложен алгоритм нахождения рабочей схемы системы с односторонними связями, основанный на итерационном процессе решения на каждом шаге возрастания нагрузки. Приведен пример расчета, иллюстрирующий эффективность алгоритма.

**Ключевые слова:** многопролетная балка, дискретные односторонние связи, рабочая схема, пошаговый анализ, метод конечных элементов в форме классического смешанного метода.

DOI 10.32683/0536-1052-2021-748-4-21-29

Постановка проблемы расчета систем с односторонними связями исторически связана с работами Х. Гюйгенса, Г. Лейбница и П. Вариньона, опубликованными еще в XVII в. Эта проблема по-прежнему остается актуальной. В СССР впервые она была рассмотрена в известной монографии И.М. Рабиновича «Некоторые вопросы теории сооружений, содержащих односторонние связи» [1], которая послужила толчком для разработки различных подходов и методов расчета систем с односторонними связями [2, 3].

В данной статье предложена обобщенная физическая модель многопролетной балки с упругими односторонними связями, работающими только на сжатие. История развития этой формы метода конечных элементов (МКЭ) отражена в диссертации А.В. Игнатьева [4] и связана с работами А.М. Масленникова [5, 6], Ф. Брейзи [7–9], А. Поцески [10–12] и других исследователей. К такой модели могут быть сведены многопролетные балки с односторонними связями, имеющими самые различные свойства (линейно и нелинейно деформируемые, упрочняющиеся и разупрочняющиеся и т.д.).

Математическая модель, соответствующая приведенной физической модели, строится на основе МКЭ в форме классического смешанного метода [4, 13]. В соответствии с этим методом, представим исходную физическую модель в виде ансамбля конечных элементов [13, 14].

На рис. 1 приведены основные неизвестные смешанного метода и их обозначения:  $q_1, \dots, q_4$  – кинематические смещения концов КЭ;  $\tilde{q}_5, \tilde{q}_6, \tilde{q}_7$  – силовые неизвестные (изгибающие моменты, приложенные во введенных

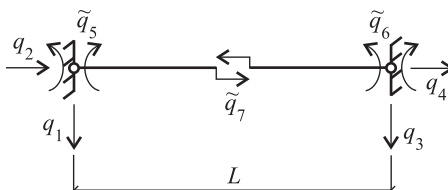


Рис. 1

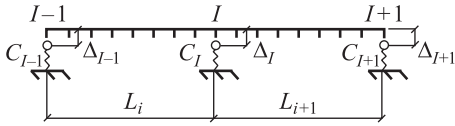


Рис. 2

в основную систему шарнирах по концам конечных элементов, продольные усилия в стержнях).

Обобщенная основная система и основные неизвестные для ансамбля КЭ рассматриваемой балки этого вида

показаны на рис. 2, приведен ее фрагмент, состоящий из двух смежных пролетов  $i$  и  $i + 1$  многопролетной балки ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Каждый из пролетов представляет собой ансамбль из  $n$  конечных элементов.

Обобщенная физическая модель многопролетной балки с односторонними опорными связями приведена на рис. 3. Она включает в себя геометрические и физические параметры балки, физические свойства опор и материала и т.д. (Аналогично может быть представлена и физическая модель пластинки с односторонними связями на контуре и внутри контура.)

Рассматриваемая физическая модель балки представляется ансамблем конечных элементов с основными неизвестными смешанного метода во всех узлах конечно-элементной сетки.

Рассмотрим далее стержневой конечный элемент второго вида, впервые введенный в работе [14]. Основные неизвестные для  $i$ -го элемента многопролетной балки и их нумерация показаны на рис. 3.

$q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, q_3^{(i)}, q_4^{(i)}$  – кинематические неизвестные (линейные смещения узлов конечного элемента);

$\tilde{q}_5^{(i)}, \tilde{q}_6^{(i)}, \tilde{q}_7^{(i)}$  – силовые неизвестные.

Кинематические неизвестные двух смежных КЭ с общим узлом  $I$  связаны соотношениями:  $q_3^{(i-1)} = q_1^{(i)}$ ;  $q_4^{(i-1)} = q_2^{(i)}$ ; а силовые неизвестные –  $\tilde{q}_6^{(i-1)} = \tilde{q}_5^{(i)}$ .

Для системы с двусторонними связями математическая модель представляется в виде двух групп конечно-элементных уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние (НДС) двух смежных КЭ с общим узлом  $I$  в пролете и с общим узлом  $I$  над односторонними опорами (см. рис. 3):

- уравнения равновесия узла  $I$ ;
- уравнение совместности деформаций (углов поворота) смежных КЭ в узле  $I$ ;
- величины реакции  $R_I$  в опорных связях;
- величины перемещений  $\delta_I$  по направлениям имеющих зазоры  $\Delta_I$ .

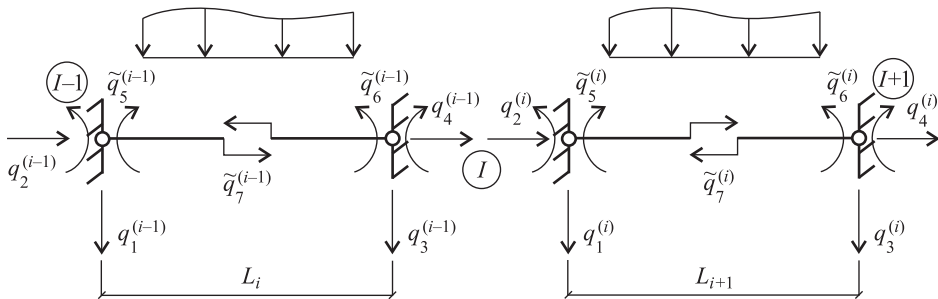


Рис. 3

Эти уравнения в развернутой форме имеют следующую структуру:

$$R_I = (r_{i1}q_1 + r_{i2}q_2 + r_{i3}q_3 + r_{i4}q_4 + r_{i5}q_5 + r_{i6}q_6 + r_{i7}q_7 + r_{iP})^{(\text{лев})} + \text{ — уравнение} \\ + (r_{i1}q_1 + r_{i2}q_2 + r_{i3}q_3 + r_{i4}q_4 + r_{i5}q_5 + r_{i6}q_6 + r_{i7}q_7 + r_{iP})^{(\text{прав})} = 0$$

равновесия узла  $I$ ;

$$\delta_I = (\delta_{i3}q_3^{(i)} + \delta_{i4}q_4^{(i)} + \delta_P^{(i)}) + (\delta_{i5}q_5^{(i)} + \delta_{i6}q_6^{(i)} + \delta_{i7}q_7^{(i)}) + \text{ — уравнение} \\ + (\delta_{i2}q_2^{(i)} + \delta_{i3}q_3^{(i)} + \delta_{i5}q_5^{(i)} + \delta_{i6}q_6^{(i)} + \delta_{i+1,P}) = 0$$

совместности деформаций (углов поворота сечения в общем для  $i$ -го и  $(i + 1)$ -го КЭ в узле  $I$  (рис. 3).

В этих уравнениях коэффициенты – элементы матриц откликов и вектора нагрузок КЭ.

В надпорном узле  $I$  (см. рис. 3)  $R_I = c_I \Delta_I$ .

Индекс  $I$  связан с нумерацией опорных узлов в соответствующем пролете, поэтому в выражении индексы принадлежности к  $i$ -му и  $(i + 1)$ -му КЭ  $n_i$  и  $n_{i+1}$ .

Из решения системы конечно-элементных уравнений находятся все параметры НДС балки (изгибающие моменты, перемещения в узлах) конечно-элементной сетки. Это решение является начальным этапом решения задачи для системы с односторонними связями. Далее оно анализируется с целью получения ответа на вопросы:

- 1) совпадает или нет направление реакций  $R_I$  в опорных связях с их рабочим направлением при рассмотрении их как односторонних;
- 2) исчерпывается ли зазор между балкой и опорными односторонними связями по их рабочим направлениям.

Ответы на эти вопросы являются главными в базовом алгоритме, включающем итерационный процесс нахождения рабочей схемы балки на каждом шаге догружения балки.

Число неизвестных и число разрешающих уравнений должно совпадать. При наличии нескольких связей, в которых реакции не соответствуют рабочему направлению, исключается из дальнейших расчетов только одна связь, в которой величина реакции, не соответствующей рабочему направлению, наибольшая.

При пошаговом возрастании заданной нагрузки от нуля до конечного значения может быть прослежен весь процесс изменения НДС системы с односторонними связями. Этот прием позволяет избежать закливания итерационного процесса.

Таким образом, приходим к следующему алгоритму расчета.

На первой итерации первого варианта может оказаться более эффективной расчетная схема, при которой все односторонние связи принимаются за двусторонние.

В этом случае алгоритм расчета будет иметь следующую последовательность.

1. После выполнения расчета при схеме со всеми двусторонними связями выполняется оценка величин и направлений реакций в односторонних связях, преобразованных в двусторонние:

- а)  $R_I > 0$  по рабочему направлению  $I$ -й односторонней связи;

- б)  $R_I = 0$  по рабочему направлению  $I$ -й односторонней связи;
- в)  $\tilde{\Delta}_I > \Delta_I$  – перемещение по рабочему направлению  $I$ -й односторонней связи больше заданного;
- г)  $\tilde{\Delta}_I < \Delta_I$  – перемещение по рабочему направлению  $I$ -й односторонней связи меньше заданного.

2. Если выполняются оценки а) и в) или б) и в), то связь с номером  $I$  остается двусторонней, если же эти условия не выполняются, и при этом имеет место оценка г), то связь становится односторонней в расчетной схеме следующего итерационного цикла.

3. На втором итерационном цикле выполняется расчет балки с расчетной схемой, полученной после первого цикла, и снова делается оценка величин и направлений реакций во всех опорных связях с номером  $I$ .

4. По оценкам а), б), в), г) принимается соответствующее решение по конструкции расчетной схемы следующего итерационного цикла. Если для опоры, которая после предыдущего цикла стала односторонней, выполняется оценка г), то она остается односторонней. Если не выполняется, то она становится двусторонней.

5. С новой расчетной схемой, полученной после второго итерационного цикла, выполняется расчет и формирование новой расчетной схемы в той же последовательности, что и на втором итерационном цикле.

6. Итерационные циклы продолжаются до совпадения расчетных схем на  $k$ -й и  $(k + 1)$ -й итерациях.

Пример 1. Для иллюстрации произведем расчет многопролетной балки, приведенной на рис. 4. Эта задача впервые рассмотрена в [2], где было отмечено, что расчет ее, выполненный с использованием алгоритма, предложенного И.М. Рабиновичем [1], приводит к закликиванию итерационного процесса. Также эта задача используется для верификации ПК ЛИРА САПР и приводится в верификационном отчете программного комплекса [3].

На каждом шаге догружения балки расчет выполняется по изложенному выше алгоритму. Основная система МКЭ в форме классического смешанного метода для первого шага расчета приведена на рис. 5.

В выполненном нами решении данной задачи система разрешающих уравнений МКЭ в форме классического смешанного метода приведена в наших предыдущих работах [15, 16].

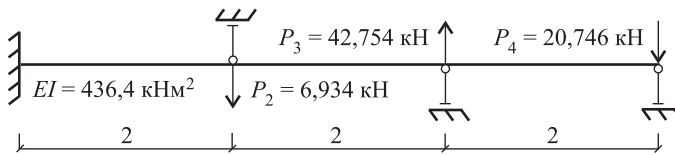


Рис. 4

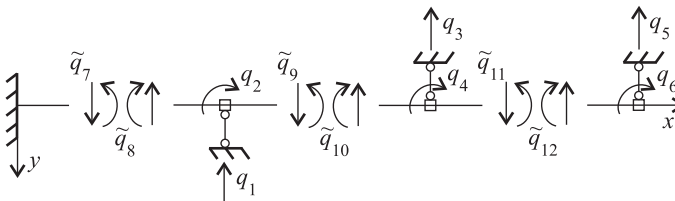


Рис. 5

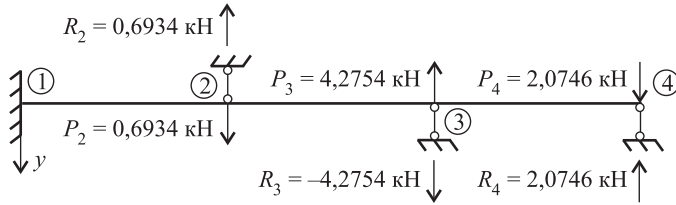


Рис. 6

Применим процесс пошагового нагружения балки, нагрузку на 10 шагов, т.е.  $\Delta P = 0,1P$ , где  $P$  – заданная нагрузка.

1. На первом шаге произведем расчет с нагрузкой, равной  $0,1P$ .
2. Установим в точках предполагаемого касания балки с односторонними опорами двусторонние опоры. Результаты на первом шаге расчета приведены на рис. 6.

3. Анализируя величины  $R_I$ , находим наибольшую из них, направленную в сторону, отличную от направления работы односторонней связи. На рисунке знак « $\leftrightarrow$ » присвоен тем направлениям, которые не соответствуют рабочим направлениям связей.

3. Опора 3, над которой находится  $R_{3(\max)}$  – максимальная нагрузка в нерабочем направлении опоры, снимается.

4. Производится расчет балки с новой расчетной схемой, находятся величины  $R_I$  над оставшимися односторонними опорами. Одновременно определяются перемещения по направлению снятых связей. Результаты расчета системы приведены на рис. 7.

5. Выполняется анализ результатов, и снова находятся величины реакций в оставшихся односторонних связях и перемещения по направлению убранных из расчета связей. Односторонняя связь, в которой реакция  $R_{I(\max)}$  по нерабочему направлению, снимается. Находятся перемещения по направлению снятых связей. Если они меньше либо равны 0, то связи возвращаются в расчет.

6. Итерации повторяются до тех пор, пока не будут соблюдены условия  $R_I \geq 0$  во всех включенных в работу односторонних связях (за положительное направление принимают рабочее направление односторонних связей).

7. На втором шаге произведем расчет с нагрузкой, равной  $0,2P$  (рис. 8).

Выполняется анализ результатов, находятся величины реакций в оставшихся односторонних связях и перемещения по направлению убранных из расчета связей. Односторонняя связь, в которой  $R_{I(\max)}$  по нерабочему направлению, снимается. Находятся перемещения по направлению снятых

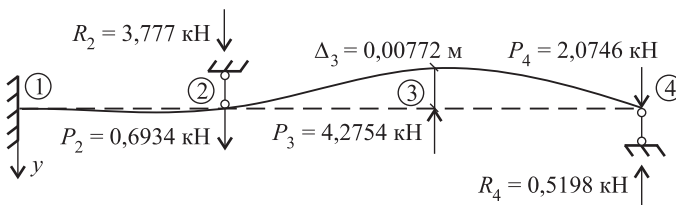


Рис. 7

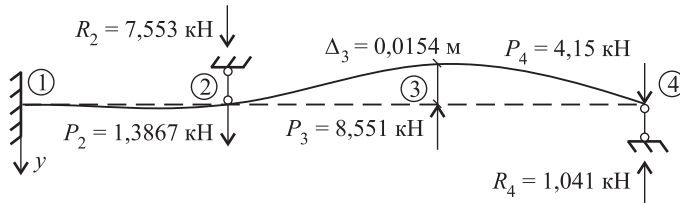


Рис. 8

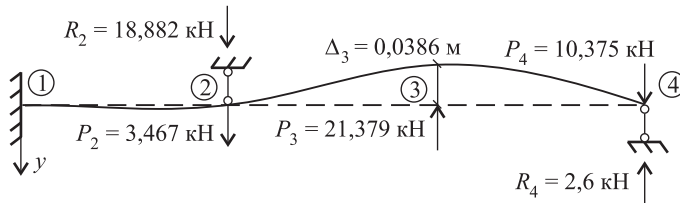


Рис. 9

связей. Если они меньше либо равны 0, то связи включаются в расчет. На последующих шагах выполняется та же последовательность расчетов.

...

10. На пятом шаге произведем расчет с нагрузкой, равной  $0,5P$  (рис. 9).

Выполняется анализ результатов и находятся величины  $R_I$  и  $R_{I(\max)}$ . Опора, над которой  $R_{I(\max)}$ , также удаляется из расчета. Если перемещение в раскрепленной ранее односторонней связи превышает заданное предельное раскрытие, то в ней снова вводится двусторонняя связь.

...

15. На десятом шаге произведем расчет с нагрузкой, равной  $\sum_{i=1}^{10} \Delta P_i = P_i$ ,

т.е. с полной нагрузкой (рис. 10).

Выполняется анализ результатов и снова находятся величины  $R_I$  и  $R_{I(\max)}$ . Опора, над которой  $R_{I(\max)}$ , также удаляется из расчета. Если перемещение в раскрепленной ранее односторонней связи превышает заданное предельное раскрытие, то в ней снова вводится двусторонняя связь.

Далее приведена таблица сравнения результатов расчета системы по МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ) и аналитическим решением, приведенным в [3].

Полученный результат совпадает с приведенным в верификационном отчете. Минимальное количество итераций в верификационном отчете – 1000, при использовании нашего алгоритма для нахождения рабочей схемы понадобилось 3 итерации.

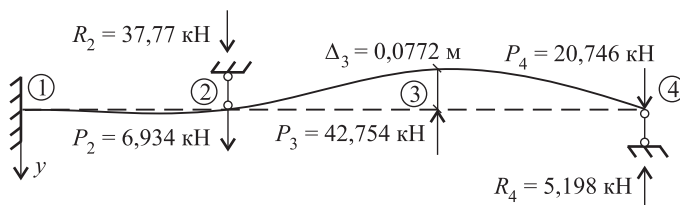


Рис. 10

**Сравнение результатов расчета системы по МКЭ в форме КСМ и аналитическим решением**

Показатель	Аналитическое решение	МКЭ в форме КСМ	Расхождение, %
$R_2$ , кН (тс)	37,1397 (3,7872)	37,77 (3,8508)	1,6
$\Delta_3$ , м	0,0772	0,0772	0
$R_4$ , кН (тс)	5,198 (0,5302)	5,198 (0,5302)	0

Также в качестве примеров, расширяющих область применения алгоритма, рассматривались задачи расчета систем на одностороннем винклеровском основании. Задачи показали высокую точность решения по сравнению с аналитическим решением.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Рабинович И.М. Некоторые вопросы теории сооружений, содержащих односторонние связи // Инженерный сборник. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. Т. 6.
2. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Киев: Сталь, 2002. 600 с.
3. Верификационный отчет по программному комплексу ЛИРА-САПР. Т. 2. Верификационные примеры, входящие в состав поставки ПК ЛИРА-САПР. М.: ГУП МНИИТЭП, 2015.
4. Игнатъев А.В. Развитие и применение смешанной формы МКЭ в расчетах стержневых систем и пластинок: Дис. ... канд. техн. наук. Волгоград, 2002.
5. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций методом конечных элементов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 78 с.
6. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 224 с.
7. Brezzi F., Douglas J., Marini L.D. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems // Numer. Math. 1985. Vol. 47. P. 217–235.
8. Brezzi F., Douglas J., Fortin M., Marini L.D. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables // RAIRO Mod`el. Math. Anal. Numer. 1987. Vol. 21. P. 581–604.
9. Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element method // Springer series in computational mathematics. 1991. Vol. 15. 350 p.
10. Poeski A. From deformation to mixed and hybrid formulation of the finite element method // J. Theor. App. Mechanics, Yug. Society of Mechanics. Belgrade, 1979. No. 5.
11. Poeski A. A mixed finite element method for bending of plates // Int. J. Num. Meth. Eng. 1975. Vol. 9, No. 1. P. 3–15.
12. Poeski A. Mixed finite element method. Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. 356 p.
13. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики: Моногр. Волгоград, 2005. 99 с.
14. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В., Апраксина Т.И., Бахтин Ю.Н. Расчет стержневых систем методом конечных элементов: Учебно-методический комплекс: в 2 ч. Ч. 1: МКЭ в задачах статики. Волгоград: ВолГАСУ, 2008. 189 с.
15. Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Бочков М.И. Применение метода конечных элементов в форме классического смешанного метода к расчету систем с односторонними связями // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2. С. 52–61.

16. *Игнатьев А.В., Игнатьев В.А., Бочков М.И.* Расчет многопролетных балок с односторонними связями по МКЭ в форме классического смешанного метода // *Вестн. Волгогр. гос. архитектурно-строит. ун-та. Сер. Стр-во и архитектура.* 2017. № 48. С. 94–108.

**Игнатьев Владимир Александрович**, д-р техн. наук, проф.

Волгоградский государственный технический университет

**Игнатьев Александр Владимирович**, д-р техн. наук, проф.

Волгоградский государственный технический университет

**Бочков Максим Иванович**, инж.

Волгоградский государственный технический университет

Получено после доработки 15.03.2021

**Ignat'ev Vladimir Aleksandrovich**, DSc, Professor

Volgograd State Technical University, Russia

**Ignat'ev Aleksandr Vladimirovich**, DSc, Professor

Volgograd State Technical University, Russia

**Bochkov Maksim Ivanovich**, Engineer

Volgograd State Technical University, Russia

## **BASIC UNIFIED ALGORITHM FOR CALCULATING SYSTEMS WITH UNILITERAL CONNECTIONS**

The problems of statics of systems with uniliteral connections are considered. A generalized physical model of such a system is proposed in the form of a multi-span beam with one-way support links operating only on compression. The construction of the corresponding mathematical model based on the finite element method in the form of the classical mixed method is described in detail. The algorithm for finding the working scheme of a system with one-way connections, based on the iterative solution process at each step of increasing load, is highlighted. The article includes an example of the calculation illustrating the efficiency of the algorithm.

**Key words:** multi-span beam, discrete uniliteral connections, working scheme, step-by-step analysis, finite element method in the form of the classical mixed method.

### **REFERENCES**

1. *Rabinovich I.M.* Nekotorye voprosy teorii sooruzheniy, sodержashchikh odnostoronnnye svyazi [Some questions of the theory of structures containing unilateral connections]. *Inzhenernyy sbornik [Engineering digest].* Moscow, Leningrad, 1950. Т. 6. (in Russian)
2. *Perel'muter A.V., Slivker V.I.* Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost' ikh analiza [Design models of structures and the possibility of their analysis]. Kiev, 2002. 600 p. (in Russian)
3. Verifikatsionnyy otchet po programmnomu kompleksu LIRA-SAPR. Tom 2. Verifikatsionnye primery, vkhodyashchie v sostav postavki PK LIRA-SAPR [Verification report on the LIRA-CAD software package. Volume II. Verification examples included in the delivery of the LIRA-CAD PC]. Moscow, 2015. (in Russian)
4. *Ignat'ev A.V.* Razvitiye i primeneniye smeshannoy formy MKE v raschetakh sterzhnevyykh sistem i plastinok: Dis. ... kand. tekhn. nauk [Development and application of the mixed form of FEM in the calculations of rod systems and plates: Candidate's thesis]. Volgograd, 2002. (in Russian)



5. *Maslennikov A.M.* Raschet stroitel'nykh konstruksiy metodom konechnykh elementov [Calculation of building structures by the finite element method]. Leningrad, 1977. 78 p. (in Russian)
6. *Maslennikov A.M.* Raschet stroitel'nykh konstruksiy chislennymi metodami [Calculation of building structures by numerical methods]. Leningrad, 1987. 224 p. (in Russian)
7. *Brezzi F., Douglas J., Marini L.D.* Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numer. Math.* 1985. Vol. 47. Pp. 217–235.
8. *Brezzi F., Douglas J., Fortin M., Marini L.D.* Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. *RAIRO Mod`el. Math. Anal. Numer.* 1987. Vol. 21. Pp. 581–604.
9. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element method. *Springer Series In Computational Mathematics.* 1991. Vol. 15. 350 p.
10. *Poceski A.* From deformation to mixed and hybrid formulation of the finite element method. *J. Theor. App. Mechanics, Yug. Society of Mechanics.* Belgrade, 1979. No. 5.
11. *Poceski A.* A mixed finite element method for bending of plates. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 1975. Vol. 9. No. 1. Pp. 3–15.
12. *Poceski A.* Mixed finite element method. Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. 356 p.
13. *Ignat'ev V.A., Ignat'ev A.V.* Smeshannaya forma metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki: Monogr. [The mixed form of the finite element method in problems of structural mechanics: Monogr.]. Volgograd, 2005. 99 p. (in Russian)
14. *Ignat'ev V.A., Ignat'ev A.V., Apraksina T.I., Bakhtin Yu.N.* Raschet sterzhnevyykh sistem metodom konechnykh elementov: uchebno-metodicheskiy kompleks: v 2 ch. Ch. 1: MKE v zadachakh statiki [Calculation of rod systems by the finite element method: an educational and methodological complex: in 2 hours. 1: FEM in static problems]. Volgograd, 2008. 189 p. (in Russian)
15. *Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Bochkov M.I.* Primenenie metoda konechnykh elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda k raschetu sistem s odnostoronnimi svyaziyami [Application of the finite element method in the form of a classical mixed method to the calculation of systems with unilateral connections]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Construction mechanics and calculation of structures]. 2017. No. 2. Pp. 52–61. (in Russian)
16. *Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Bochkov M.I.* Raschet mnogoproletnykh balok s odnostoronnimi svyaziyami po MKE v forme klassicheskogo smeshannogo metoda [Calculation of multi-span beams with unilateral connections according to FEM in the form of a classical mixed method]. *Vestn. Volgogr. gos. arkhitekturno-stroit. un-ta. Ser. Str-vo i arkhitektura* [Papers of the VolgGASU. Construction and architecture series]. 2017. No. 48. Pp. 94–108. (in Russian)