
СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ

BUILDING CONSTRUCTIONS, BUILDINGS AND STRUCTURES. BASES AND FOUNDATIONS

Известия вузов. Строительство. 2022. № 1. С. 5–21.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2022; (1): 5–21.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 624.012.45

DOI: 10.32683/0536-1052-2022-757-1-5-21

СОПРОТИВЛЕНИЕ ОБЫЧНЫХ И ВЫСОКОПРОЧНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ИЛИ КОРОБЧАТОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ С ИЗГИБОМ

**Владимир Иванович Колчунов¹, Анастасия Вадимовна Козарез²,
Максим Владимирович Протченко³**

¹Юго-Западный государственный университет, Курск, Россия, vlik52@mail.ru

²Крымский федеральный университет им. Вернадского, Симферополь, Россия,
kozarez.1995@mail.ru

³Брянский инженерно-технологический университет, Брянск, Россия,
maxBROMmax@ya.ru

Аннотация. Разработаны практическая модель и алгоритм аналитического сопротивления железобетонных конструкций прямоугольного и коробчатого поперечного сечения при кручении с изгибом, построен график зависимости угла главных деформаций укорочения, поперечный пролет и отношения крутящего к изгибающему моменту при сложном нагружении. Практическая модель включает составляющие внешних усилий в стержневой конструкции прямоугольного и коробчатого поперечного сечения, пространственный характер трещин при совместном действии обозначенных моментов, поперечных и продольных сил, различные случаи расположения сжатой и растянутой зоны бетона в зависимости от соотношения действующих усилий в проектируемой конструкции. Для блоков бетона и связей арматуры в пространственной трещине получены пространственные и поперечные сечения с модифицированной гипотезой линейных и угловых деформаций. Аналитические зависимости позволяют определять связанные между собой расчетные параметры рассматриваемой сложнапряженной конструкции, такие как напряжения в бетоне сжатой зоны, высоту сжатого бетона, напряжения в продольной и поперечной арматуре, деформации в бетоне и арматуре, длину проекции пространственной трещины и другие. Построенная деформационная практическая модель и алгоритм расчета могут быть использованы при проектировании различных эффективных железобетонных конструкций, работающих на изгиб с кручением.

© Колчунов Вл.И., Козарез А.В., Протченко М.В., 2022

Ключевые слова: железобетонные конструкции, алгоритм, пример расчета, квадратное сечение, расчетная схема, изгибающий момент, крутящий момент, опасная пространственная трещина

Для цитирования: Колчунов Вл.И., Козарез А.В., Протченко М.В. Сопrotивление обычных и высокопрочных железобетонных конструкций прямоугольного или коробчатого поперечного сечения при кручении с изгибом // Известия вузов. Строительство. 2022. № 1. С. 5–21. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-757-1-5-21.

Original article

RESISTANCE OF NORMAL AND HIGH-STRENGTH REINFORCED CONCRETE STRUCTURES OF RECTANGULAR OR BOX-SHAPED CROSS-SECTION UNDER TORSION AND BENDING

Vladimir I. Kolchunov¹, Anastasiya V. Kozarez², Maksim V. Protchenko³

¹The Southwestern State University, Kursk, Russia, vlik52@mail.ru

²V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia, kozarez.1995@mail.ru

³Bryansk State Engineering Technological University, Bryansk, Russia, maxBROMmax@ya.ru

Abstract. A practical model and algorithm for calculating the resistance of reinforced concrete structures of rectangular and box-shaped cross-section under torsion with bending has been developed. The dependence diagram of the main deformation angle and the ratio of the span to section height has dependences at different ratios for the torsional to bending moment under complex loading. The practical model includes the components of external forces in the structure of rectangular and box-shaped cross-section, the spatial nature of cracks in the joint action of the indicated moments, transverse and longitudinal forces, different cases of location of the compressed and stretched zones in concrete depending on the ratio of the acting forces. Spatial and transverse sections with modified linear and angular deformation hypothesis were obtained for concrete blocks and reinforcement bonds in a spatial crack. The analytical dependences make it possible to determine interconnected design parameters of the considered complex-stressed structure, such as stresses in the concrete of the compressed zone, height of the compressed concrete, stresses in the longitudinal and transverse reinforcement, including «dowel» forces, deformations in concrete and reinforcement, length of the spatial crack projection.

Keywords: reinforced concrete, calculation algorithm, calculation algorithm, rectangular section, calculation scheme, bending moment, torsion, spatial crack

For citation: Kolchunov V.I., Kozarez A.V., Protchenko M.V. Resistance of normal and high-strength reinforced concrete structures of rectangular or box-shaped cross-section under torsion and bending. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2022; (1): 5–21. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2022-757-1-5-21.

Введение. Построение практических моделей сложного сопротивления – кручения с изгибом становится все более актуальным [1–4], во-первых, потому, что таких исследований проведено сравнительно мало [3–9], во-вторых, это вызвано назревшей необходимостью учета пространственной работы подавляющего большинства железобетонных конструкций все более оригинальных зданий и сооружений, существенно изменяющих архитектурный облик современных городов [10–15]; в-третьих, становится уже общепризнанным постулатом, что нет ничего практичнее хорошей теории их расчета [16–23].

Поэтому целью настоящих исследований являются разработка схемы сопротивления железобетонных конструкций и пример выполнения расчета при кручении с изгибом для поперечных сечений, наиболее полно отражающей особенности их действительной работы [10, 23–25].

Практическая модель и пример выполнения расчета. Железобетонная конструкция в поперечном сечении имеет пространственную трещину. Для расчетных усилий составлены разрешающие уравнения равновесия и деформаций. При этом пространственная трещина определяется с использованием пространственного сечения $k-k$, а также поперечных сечений от 1-1 (начало) до 3-3 (в конец) для первого и второго блоков (рис. 1). В сжатом бетоне расположены три участка l_1, l_2, l_3 – продольные сечения l_1 и l_3 , а также пространственное сечение l_2 .

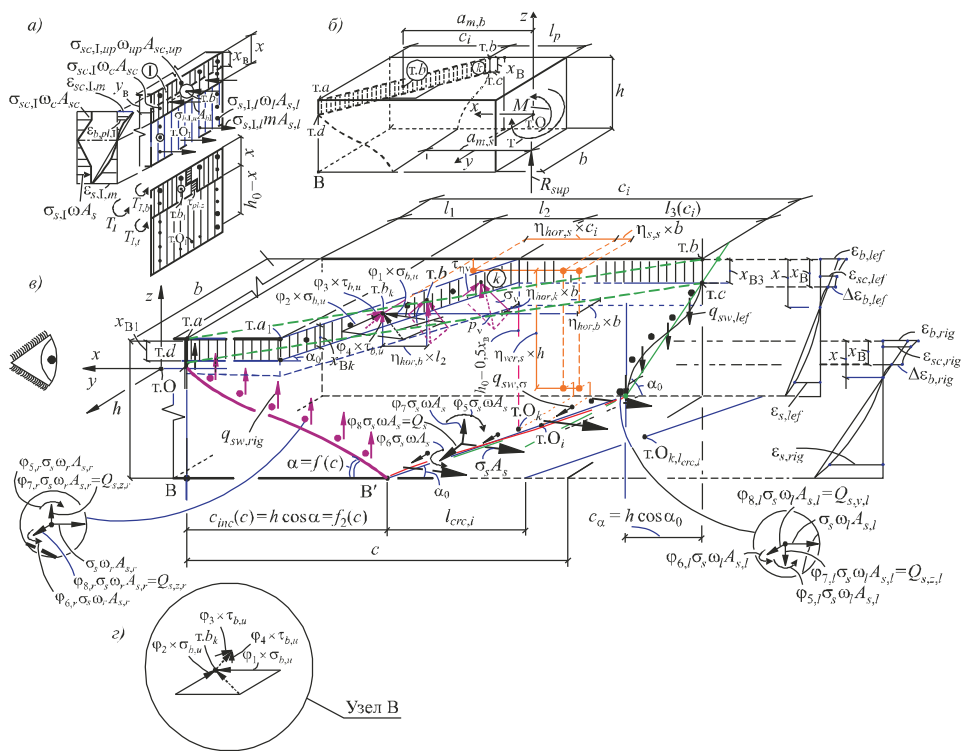


Рис. 1. Расчетная схема А сопротивления железобетонной конструкции при совместном действии изгибающего и крутящего моментов и поперечной силы в пространственной трещине

a – припорный блок, образованный пространственным сечением k ; b – блок, образуемый вертикальным сечением I-I, проходящим перпендикулярно к продольной оси железобетонного элемента по краю сжатой зоны, замыкающей пространственную спиралеобразную трещину; v – расчетная схема пространственного сечения k ; z – составляющие напряжений бетона сжатой зоны, приложенных в точке b (узел В)

Fig. 1. Calculation scheme A of the resistance of a reinforced concrete structure under the combined action of bending and torques and transverse force in a spatial crack
 a – a supporting block formed by a spatial section k ; b – a block formed by a vertical section I-I passing perpendicular to the longitudinal axis of the reinforced concrete element along the edge of the compressed zone closing the spatial spiral-shaped crack; c – the design scheme of the spatial cross section k ; d – components of the stresses of the concrete of the compressed zone applied at point b (node V)

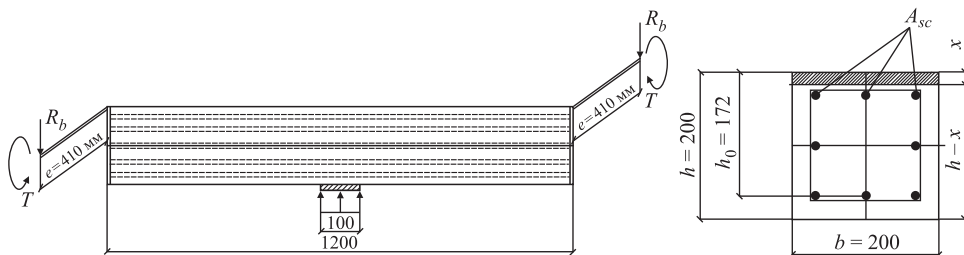


Рис. 2. Расчетная схема нагрузок для консолей балки квадратного сечения

Fig. 2. Design scheme of loads for square beam consoles

Тогда получим материалы для исходных данных:

а) геометрические характеристики конструкции – шифр конструкции БВ-КР-410 (2); размеры сечения $b \times h$ 200×200 мм, $a_s = a'_s = 25$ мм, $h_0 = h - a_s - d/2 = 200 - 25 - 3 = 172$ мм; длина балки $l = 1200$ мм; эксцентриситет приложения нагрузки $e = 410$ мм (рис. 2);

б) этап нагружения конструкции – $R_{sup} = 30,5$ кН, $P_{max} = 15,25$ кН, $M_{t, max, exp} = eP_{exp} = 410 \cdot 15,25 = 6,25$ кНм; $M_{bend, max, exp} = P_{exp}a = 15,25 \cdot 0,6 = 9,15$ кНм;

в) физико-механические характеристики бетона и арматуры – бетон класса В100, $R_b = 47,5$ МПа – призменная прочность бетона, $R_{bt} = 2,2$ МПа – прочность бетона на растяжение; арматура продольная Ø6A240С: $R_s = 210$ МПа, $R_{sc} = 210$ МПа, $R_{sw} = 170$ МПа и поперечная Ø6A240С: $R_{sw} = 170$ МПа.

Практическая модель и пример выполнения расчета. Пункт 1. Для высокопрочного бетона находятся граничные деформации величины $\epsilon_{b,u, str}$ ($\epsilon_{b,u, str} = 0,0035 \cdot k_{str} = 322 \cdot 10^{-5}$, где уменьшение высокопрочного бетона по сравнению с обычным бетоном $k_{str} = 0,92$).

В соответствии с принятым критерием разрушения интенсивность $\epsilon_{i,u}$ укорочения деформации бетона полагаем $\epsilon_{b,u, str} = \epsilon_{i,u}$, $\sigma_{i,u} = \beta_b R_b$. Принимаем $\epsilon_{2,u} = \epsilon_{3,u} = -0,2 \cdot \epsilon_{1,u}$:

$$\epsilon_{b,u, str} = \epsilon_{i,u} = \frac{\sqrt{2}}{2[1 + \mu(\lambda)]} \sqrt{(\epsilon_{1,u} - \epsilon_{2,u})^2 - (\epsilon_{2,u} - \epsilon_{3,u})^2 + (\epsilon_{3,u} - \epsilon_{1,u})^2}; \quad (1)$$

$$\epsilon_{b,u, str} = \frac{\sqrt{2}}{2[1 + 0,2]} \times \sqrt{(\epsilon_{1,u} - (-0,2\epsilon_{1,u}))^2 - (-0,2\epsilon_{1,u} - (-0,2\epsilon_{1,u}))^2 + (-0,2\epsilon_{1,u} - \epsilon_{1,u})^2} = 322,0 \cdot 10^{-5}.$$

Откуда получаем главные укорочения деформации бетона $\epsilon_{1,u} = 322,1 \cdot 10^{-5}$.

Тогда $\epsilon_{2,u} = \epsilon_{3,u} = -0,2 \cdot 322,1 \cdot 10^{-5} = -64,42 \cdot 10^{-5}$.

Теперь найдем секущий модуль бетона

$$E(\lambda) = \frac{\sigma_{i,u}}{\epsilon_{i,u}} = \frac{\beta_b R_b}{\epsilon_{b,u}} = \frac{0,8 \cdot 47,5 \cdot 10^6}{322 \cdot 10^{-5}} = \frac{38 \cdot 10^6}{322 \cdot 10^{-5}} = 11801 \text{ МПа}. \quad (2)$$

Пункт 2. Вычисляем из механики твердого деформируемого тела предельные угловые деформации γ_{sum} (обозначаем $\epsilon_{q,u}$) на основе практической модели для графика [26] (рис. 3, сечение на расстоянии $a = 600$ мм от левой

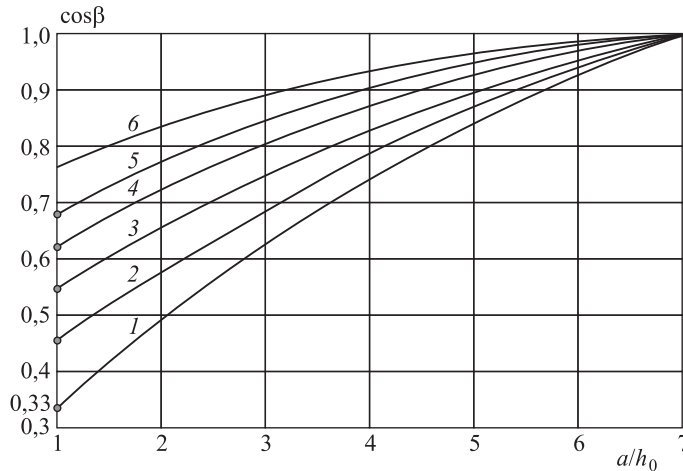


Рис. 3. График зависимости $a/h_0 - \cos\beta$: при отношении $T/M = 0,1$ (1); 0,25 (2); 0,5 (3); 0,75 (4); 1,0 (5); при отношении $T/M > 1,0$ (6)

Fig. 3. Dependence graph $a/h_0 - \cos\beta$: with a ratio of $T/M = 0,1$ (1); 0,25 (2); 0,5 (3); 0,75 (4); 1,0 (5); with a $T/M > 1,0$ (6)

опоры для h_0 и упругопластического угла; $\beta = 43,94^\circ$; $\cos\beta = 0,72$; ($\sin\beta = 0,69$; при $T_1/M_1 = 0,41R_{sup}/0,4R_{sup} = 1,02$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{q,u} &= 2\cos\beta\sin\beta(\varepsilon_{1,u} - \varepsilon_{3,u}) = \\ &= 2 \cdot 0,69 \cdot 0,72 (322,1 + 64,42) \cdot 10^{-5} = 386,26 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (3)$$

Пункт 3. Определяем величину длины пространственной трещины, где ограничение $c_0 \leq c \leq 2h + b$. Тогда для численного значения $c = 2h + b = 2 \cdot 200 + 200 = 600$ мм и по формуле (пункт 8.1.9 СП 63.13330.2018)

$$c_0 = \sqrt{\frac{R_s A_{s,I}(2h + b)}{q_{sw,1}}} = \sqrt{\frac{210 \cdot 10^6 28,26 \cdot 10^{-6} (2 \cdot 0,2 + 0,2)}{170 \cdot 10^6 28,26 \cdot 10^{-6} / 0,1}} = 272 \text{ мм}. \quad (4)$$

Находим длину опасной пространственной трещины $c = h/\text{tg}56 + b/\text{tg}45 + h/\text{tg}45 = 200/\text{tg}56 + 200/\text{tg}45 + 200/\text{tg}45 = 500$ мм,

а также значения $l_1(c) = 200/\text{tg}56 = 100$ мм, $l_3(c) = 200$ мм, $l_2 = \text{const} = b/\text{tg}45 = 200$ мм.

Пункт 4. Вычисляем значение граничных касательных напряжений $\tau_{zx} = R_q$ из физических уравнений механики твердого деформируемого тела

$$\begin{aligned} R_q = \tau = \tau_{z_1, x_1} &= \frac{\sigma_{i,u}}{\varepsilon_{i,u}} \frac{1}{2[1+\mu(\lambda)]} \varepsilon_{q,u} = \\ &= \frac{38}{322 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{1}{2(1+0,2)} 386,21 \cdot 10^{-5} = 18,99 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пункт 5. Находим главные деформации в пространственном сечении $k-k$ (см. рис. 1) для наклонной плоскости сжатого бетона от оси x и z до осей x_1 и z_1 через упругопластический угол β :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,1} &= \varepsilon_{1,u} \cos^2 \beta + \varepsilon_{3,u} \sin^2 \beta = \\ &= 322,1 \cdot 10^{-5} \cdot 0,72^2 - 64,42 \cdot 0,69^2 \cdot 10^{-5} = 135,95 \cdot 10^{-5}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z,k} &= \varepsilon_{z,1} = \varepsilon_{1,u} \sin^2 \beta + \varepsilon_{3,u} \cos^2 \beta = \\ &= 322,1 \cdot 10^{-5} \cdot 0,69^2 - 64,42 \cdot 0,72^2 = 121,72 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пункт 6. Вычисляем значение граничных нормальных напряжений $\sigma_{x,1}$ и $\sigma_{z,k}$ из физических уравнений механики твердого деформируемого тела:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,1} &= \frac{\sigma_{i,u}}{\varepsilon_{i,u}} \frac{1}{1-\mu^2(\lambda)} [\varepsilon_{x,1} + \mu(\lambda)\varepsilon_{z,1}] = \\ &= \frac{38 \cdot 10^6}{322 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{1}{1-0,2^2} [135,95 \cdot 10^{-5} + 0,2 \cdot 121,72 \cdot 10^{-5}] = 19,70 \text{ МПа}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z,k} &= \frac{\sigma_{i,u}}{\varepsilon_{i,u}} \frac{1}{1-\mu^2(\lambda)} [\varepsilon_{z,1} + \mu(\lambda)\varepsilon_{x,1}] = \\ &= \frac{38 \cdot 10^6}{322 \cdot 10^{-5}} \cdot \frac{1}{1-0,2^2} [121,72 \cdot 10^{-5} + 0,2 \cdot 135,95 \cdot 10^{-5}] = 18,30 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пункт 7. Вычисляем напряжения и деформации на нормальной площадке по оси x в пространственном сечении $k-k$ (см. рис. 1) для наклонной плоскости сжатого бетона до осей $x_1 O z_1$, используя угол $\alpha = 45^\circ$ из физических уравнений механики твердого деформируемого тела:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{b,x,k} &= \varepsilon_{x_1} \cos^2 \alpha + \varepsilon_{z_1} \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{z_1 x_1} \sin 2\alpha = \\ &= 135,95 \cdot 10^{-5} \cos^2 45^\circ + 121,72 \cdot 10^{-5} \sin^2 45^\circ + \\ &\quad + \frac{1}{2} 386,26 \sin 90 = 321,93 \cdot 10^{-5}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x,k} &= \sigma_{x,1} \cos^2 \alpha + \sigma_{z,1} \sin^2 \alpha + \tau_{z_1 x_1} \sin 2\alpha = \\ &= 19,70 \cdot 0,5 + 18,30 \cdot 0,5 + 18,99 \cdot 1 = 38 \text{ МПа}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tau_{xz,k} = \frac{\sigma_{x,1} - \sigma_{z,1}}{2} \sin 2\alpha - \tau_{z_1 x_1} \cos 2\alpha = \frac{19,70 - 18,3}{2} \cdot 1 = 0,69 \text{ МПа}. \quad (12)$$

Пункт 8. Определим коэффициент $\varphi_{10,*}$ через переходные соотношения [24]:

$$\begin{aligned} \varphi_{10,*} &= \varphi_{\sigma_{x,u}} = \frac{\sigma_{bx,u,k}}{\sigma_{1,u}} = \frac{\sigma_{x_1,u} \cos^2 \alpha + \sigma_{z_1,u} \sin^2 \alpha + \tau_{z_1 x_1,u} \sin 2\alpha}{1,149 R_b} = \\ &= \frac{19,70 \cdot 0,707^2 + 18,3 \cdot 0,707^2 + 18,99 \cdot 1}{1,149 \cdot 47,5} = 0,696. \end{aligned} \quad (13)$$

Пункт 9. Теперь из пропорциональности деформаций $\varepsilon_{b,x}$ в сечении $k-k$ и сечении I-I (или сечении 3-3) находим деформации бетона. По оси x

для сечения I-I имеем $\varepsilon_{bx,u,I-I} = \frac{\varepsilon_{bu,x,k-k} a}{a_{m,b}} = \frac{386,26 \cdot 0,87 \cdot 10^{-5} \cdot 600}{390} = 516,9 \cdot 10^{-5}$,

для сечения 3-3 $\varepsilon_{bu,x,3} = \frac{\varepsilon_{bu,x,k} a}{a_{m,b}} = \frac{386,26 \cdot 10^{-5} \cdot 200}{390} = 198 \cdot 10^{-5}$.

Пункт 10. Вычисляем (см.: Пособие по проектированию предварительно напряженных железобетонных конструкций из тяжелых и легких бетонов (к СНиП 2.03.01–84). Ч. II (форм. 186). М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. 144 с.) непропорциональности (криволинейных) напряжений σ_z бетона (или деформаций $\varepsilon_{b,z}$) в сечении $k-k$ и сечении I-I (или сечении 3-3). В сечении $k-k$ (для $\beta_k = x_k/h_0 = 0,028/0,172 = 0,133$; $\alpha_k = 0,5c = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$), сечении I-I (для $\beta_1 = x_1/h_0 = 0,017/0,172 = 0,099$; $\alpha_1 = 0$), сечении 3-3 (для $\beta_3 = x_3/h_0 = 0,028/0,172 = 0,163$; $\alpha_1 = c = 0,4$) получим $\sigma_{z,I-I} = 1,863 \sigma_{z,k} = 1,863 \cdot 18,30 = 34,09$ МПа, $\sigma_{z,3-3} = 0,023 \sigma_{z,k} = 0,023 \cdot 18,03 = 0,42$ МПа.

Пункт 11. Из физических уравнений механики твердого деформируемого тела [27] получаем напряжение по оси x в сечении I-I (или в сечении 3-3):

$$\begin{aligned} \sigma_{x,u,I-I} &= \varepsilon_{bx,u,I-I} E_b(\lambda) + \mu \sigma_{z,I-I} = 516,9 \cdot 10^{-5} \cdot 11801 \cdot 10^6 + \\ &+ 0,2 \cdot 34,09 \cdot 10^6 = 67 \text{ МПа} \leq \sigma_{x,u} = \varphi_{\sigma_{x,u}} \sigma_{1,u} = 38 \text{ МПа}, \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_{x,u,3-3} &= \varepsilon_{bx,u,3-3} E_b + \mu \sigma_{z,3-3} = \\ &= 198,08 \cdot 10^{-5} \cdot 11801 \cdot 10^6 + 0,2 \cdot 0,42 \cdot 10^6 = 23,36 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пункт 12. Получены уравнения равновесия проекций всех сил на ось x , а также из модифицированной гипотезы [10, 24], где итерации для их решений имеют следующую систему.

Из уравнения равновесия проекций всех сил, действующих в сечении I-I на ось x , определяется высота сжатой зоны бетона x_1 в этом сечении ($\Sigma X = 0$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\varphi_{10,*} \sigma_{bu,x,I} \cdot \varphi_{z,*} \cdot b} \times \\ &\times [m \cdot R_{s,I,d} \cdot \omega_{d,cir} \cdot A_{s,d} - m \cdot R_{sc,I,up} \cdot \omega_{up,cir} \cdot A_{sc,up} - \Sigma R_{sc,I,lef} \cdot \omega_{c,cir} \cdot A_{sc,I,lef} - \\ &- \Sigma R_{sc,I,rig} \cdot \omega_{c,cir} \cdot A_{sc,I,rig} + \Sigma R_{s,I,lef} \cdot \omega_{cir} \cdot A_{s,I,lef} + \Sigma R_{s,I,rig} \cdot \omega_{cir} \cdot A_{s,I,rig}]. \end{aligned} \quad (16)$$

Из модифицированной гипотезы пропорциональности продольных деформаций (для фибровых волокон) находим напряжения в продольной рабочей арматуре $\sigma_{s,I}$ в сечении I-I (аналогично в сечении 3-3):

$$\sigma_{s,I} = \frac{\varphi_{10,*} \sigma_{bu,x,I} \cdot E_s(\lambda)}{E_b(\lambda)} \cdot \frac{h_0 - x}{x} + \sigma_0 \leq R_{s,I}. \quad (17)$$

Численно решая систему из уравнений (16) и (17), получаем

$$\begin{cases} \sigma_{s,I} = \frac{0,696 \cdot 38 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{10}}{11801 \cdot 10^6} \cdot \frac{0,175 - x_1}{x_1}; \\ x_1 = \frac{1}{0,696 \cdot 38 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,2} (5 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6}) \sigma_{s,I}. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 0,038 \text{ м}$; $\sigma_{s,1} = 1123 \text{ МПа} > R_s = 210 \text{ МПа}$. Принимаем пять растянутых стержней, $\sigma_{s,1} = R_s = 210 \text{ МПа}$, $x_1 = 0,011 \text{ м}$ с учетом линейного распределения деформаций арматуры по высоте сечения I-I.

Для сечения 3-3 имеем:

$$\begin{cases} \sigma_{s,3} = \frac{0,696 \cdot 23,36 \cdot 10^6 \cdot 20 \cdot 10^{10}}{11801 \cdot 10^6} \cdot \frac{0,175 - x_3}{x_3}, \\ x_3 = \frac{1}{0,696 \cdot 23,36 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,2} (2 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6}) \sigma_{s,3}; \end{cases}$$

$x_3 = 0,038 \text{ м}$; $\sigma_{s,3} = 1105 \text{ МПа} > R_s = 210 \text{ МПа}$. Принимаем пять растянутых стержней, $\sigma_{s,3} = R_s = 210 \text{ МПа}$, $x_3 = 0,018 \text{ м}$.

Пункт 13. Из уравнения равновесия изгибающих моментов внутренних и внешних сил в сечении I-I имеем теоретический изгибающий момент $M_{bend,1}$:

$$\begin{aligned} M_{bend,1} = & \varphi_{10,*} \cdot \sigma_{bu,x,1} A_{b,1} [h_0 - \varphi_{z,cir} \cdot x] + m \cdot R_{sc,1,up} \cdot \omega_{up,cir} \cdot A_{sc,up} (h_0 - a'_s) + \\ & + \sum R_{sc,1,i,lef} \cdot \omega_{c,cir} \cdot A_{sc,1,i,lef} (h_0 - a'_{s,i,lef}) - \sum R_{s,1,i,rig} \cdot \omega_{cir} \cdot A_{s,1,i,rig} (a_{s,i,rig} - a_{s,d}) = \\ & = 0,696 \cdot 38 \cdot 10^6 \cdot 2200 \cdot 10^{-6} \times (0,172 - 0,004) - \\ & - 3 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} \cdot 0,172 \cdot 0,1 - 3 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} \cdot 0,172 \cdot 0,1 - \\ & - 2 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} \cdot 0,072 = 8,67 \text{ кНм}. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда погрешность составляет

$$\Delta_{M_{bend,1}} = \frac{M_{bend,1,exp} - M_{bend,1}}{M_{bend,1,exp}} = \frac{9,15 - 8,67}{9,15} = 5,2 \%. \quad (19)$$

Пункт 14. Теперь получим параметры для определения внутреннего крутящего момента в сечении I-I в точке b_1 ($\sum M_{t,b_1} = 0$). Внешний крутящий момент ($M_t = 0,5R_{sup} \cdot e = 0,5R_{sup} \cdot 0,41 = 14,45 \cdot 0,41 = 5,92 \text{ кНм}$).

Плечи до центра тяжести b_1 до центра правой и левой области сжатого бетона равны (рис. 4):

$$\begin{aligned} z_{lef} = & 0,5b(1 - \eta)_{hor} - 0,25b + \eta_{lef} = \\ = & 0,5 \cdot 200(1 - 0,1) - 0,25 \cdot 200 + 16,6 = 56,6 \text{ мм}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} z_{rig} = & 0,5b(1 + \eta)_{hor} - 0,25b + \eta_{rig} = \\ = & 0,5 \cdot 200(1 + 0,1) - 0,25 \cdot 200 + 16,6 = 76,6 \text{ мм}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \eta_{lef} = & \frac{1}{2} \cdot 0,5b - \frac{1}{3} \cdot 0,5b = 0,250 \cdot 200 - 0,167 \cdot 200 = \\ = & (0,250 - 0,167) \cdot 200 = 0,083 \cdot 200 = 16,6 \text{ мм}. \end{aligned} \quad (22)$$

Угол закручивания φ_A и напряжения в сжатой зоне, в сечении 1-1, $k-k$, 3-3 определяются из уравнения [24]:

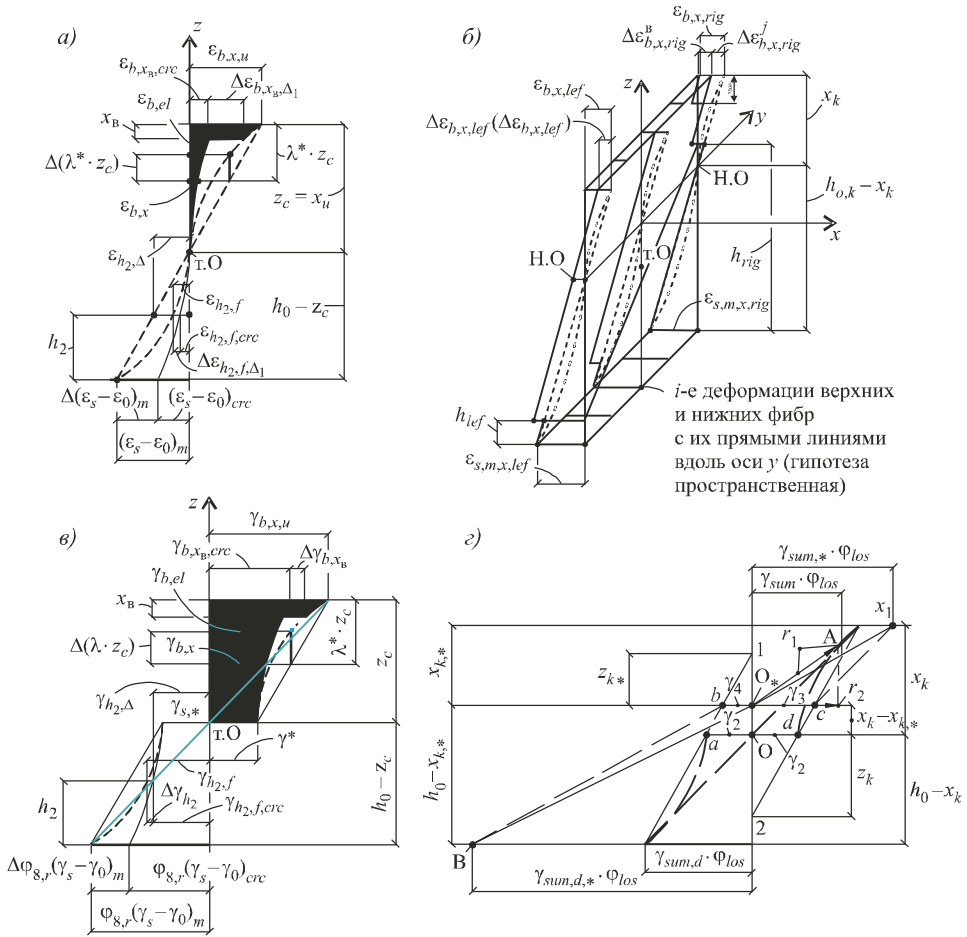


Рис. 4. Эпюры линейных деформаций для стадии II, первый и второй скачок (а), скачки-трещины (б), а также эпюра угловых деформаций (в) и следствия из гипотезы угловых деформаций (г)

Fig. 4. Diagrams of linear deformations for stage II, the first and second jumps (a), jumps-cracks (b), as well as the diagram of angular deformations (c) and the consequences of the hypothesis of angular deformations (d)

$$\begin{aligned} \varphi_{A,I-I} &= \frac{M_t}{f_{5,ff}} \cdot \frac{\pi^3}{8 \cdot G(\lambda) \cdot b^2} = \frac{M_t}{0,628 \cdot bh} \cdot \frac{\pi^3}{8 \cdot G(\lambda) \cdot b^2} = \\ &= \frac{5,92 \cdot 10^3}{0,628 \cdot 0,2 \cdot 0,2} \cdot \frac{\pi^3}{8 \cdot 4917 \cdot 10^6 \cdot 0,2^2} = 4,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned} \quad (23)$$

Определим угловые деформации и касательные напряжения сжатого бетона с использованием гипотезы угловых деформаций (см. рис. 4):

$$\begin{aligned} \gamma_{b,zx,c,M_t,rig} &= \frac{\Psi}{G(\lambda)} \left(-\frac{df_{5,*}}{dy} \right) = \frac{8 \cdot \varphi_A \cdot b^2}{\pi^3} \left(-\frac{df_{5,*}}{dy} \right) = \\ &= \frac{8 \cdot y \cdot \varphi_A}{25h^2 \pi^3} (186h^2 + 228hz - 1200z^2) = \end{aligned}$$

$$= \frac{8 \cdot 0,0667 \cdot 4,65 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 0,2^2 \pi^3} \times \quad (24)$$

$$\times (186 \cdot 0,2^2 + 228 \cdot 0,2 \cdot 0,008 - 1200 \cdot 0,008^2) = 0,619 \cdot 10^{-3};$$

$$\begin{aligned} \tau_{b, zx, c, M_t, rig} &= \tau_{b, zx, c, M_t, lef} = \gamma_{b, zx, c, M_t, lef} \cdot G(\lambda) = \\ &= 0,619 \cdot 10^{-3} \cdot 4917 \cdot 10^6 = 3,04 \text{ МПа}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{b, zx, c, M_t, b_1} &= \frac{\Psi}{G(\lambda)} \left(-\frac{df_{5,*}}{dy} \right) \frac{8 \cdot \varphi_A \cdot b^2}{\pi^3} \left(-\frac{df_{5,*}}{dy} \right) = \\ &= \frac{8 \cdot y \cdot \varphi_A}{25h^2 \pi^3} (186h^2 + 228hz - 1200z^2) = \frac{8 \cdot 0,010 \cdot 4,65 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 0,2^2 \pi^3} \times \end{aligned} \quad (26)$$

$$\times (186 \cdot 0,2^2 + 228 \cdot 0,2 \cdot 0,008 - 1200 \cdot 0,008^2) = 0,092 \cdot 10^{-3};$$

$$\tau_{b, zx, c, M_t, b_1} = \gamma_{b, zx, c, M_t, b_1} \cdot G(\lambda) = 0,092 \cdot 10^{-3} \cdot 4917 \cdot 10^6 = 0,46 \text{ МПа}. \quad (27)$$

Здесь модуль сдвига

$$G(\lambda) = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{11801 \cdot 10^6}{2(1+0,2)} = 4917 \cdot 10^6 \text{ Па}. \quad (28)$$

Пункт 15. Таким образом, касательные напряжения растянутой зоны имеют вид (рис. 5):

$$\tau_{pl, M_t, t, m} = \Psi_{M_t} \cdot R_{ch}. \quad (29)$$

Здесь $\tau_{pl, t, m}$ – касательные напряжения τ_{zx, M_t} растянутой зоны из параметра Ψ_{M_t} и пластических граничных напряжений R_{ch} (где ограничение либо сжатой зоны $\tau_{zx, c, M_t} \leq 0,5(\tau_{zx, c, M_t, rig} + \tau_{zx, c, M_t, lef})$, либо ограничение растянутой зоны $R_{ch, t} \leq 1,1R_{bt}$).

Тогда

$$\tau_{pl, t, m} = \frac{(\tau_{pl, t, lef} + \tau_{pl, t, rig})}{2} = \Psi_{M_t} \cdot R_{ch} = 1,1 \cdot 2,2 = 2,42 \text{ МПа}; \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{b, zx, c, M_t, lef} &\leq \tau_{pl, u} = R_{ch} (3,04 \leq 18,99 \text{ МПа}); \\ \tau_{b, zx, c, M_t, rig} &\leq \tau_{pl, u} = R_{ch} (3,04 \leq 18,99 \text{ МПа}). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

При этом параметр Ψ_{M_t} имеет вид:

$$\Psi_{M_t} = \frac{\tau_{pl, t}}{\tau_{pl, u}} = \frac{1,1R_{bt}}{R_{ch}} = \frac{1,1 \cdot 2,2 \text{ МПа}}{18,99 \text{ МПа}} = 0,127. \quad (32)$$

Пункт 16. Касательные напряжения от поперечной силы для сжатой и растянутой зоны $\tau_{zx, t, Q} = \tau_{pl, t, zx}$ (см. рис. 5):

$$\tau_{pl, t, zx} = \Psi_Q \cdot R_{ch}. \quad (33)$$

Здесь $\tau_{pl, t, zx}$ – касательные напряжения $\tau_{zx, Q}$ растянутой зоны из параметра Ψ_Q и пластических граничных напряжений R_{ch} (где ограничение либо сжатой зоны $\tau_{zx, c, Q}$, либо ограничение растянутой зоны $R_{ch, t} \leq 1,1R_{bt}$).

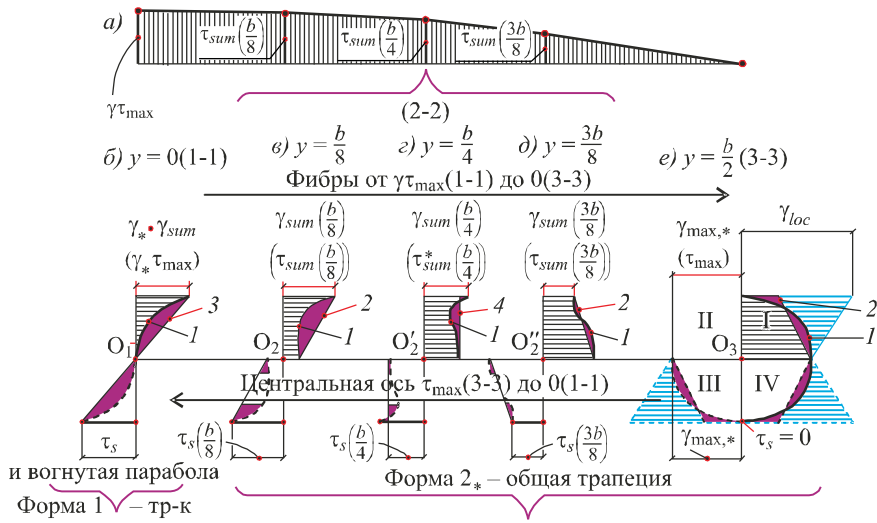


Рис. 5. Суммарная эпюра деформаций (напряжений) сдвига

а – из сечений 1-1 до 3-3; б – для треугольника (вычитание треугольника вместе с выпуклой параболой, сечение 1-1); в – в сечении 2-2 для трапеции (перехода от сечения 1-1 к сечению 3-3 при $y = b/8$ (с вогнутой параболы); г – $y = b/4$ (с смешанной кривой до прямоугольника); д – $y = 3b/8$ (с обратной выпуклой параболы); в сечении 3-3 для выпуклой параболы (или для практической приближенной трапеции); е – при $y = b/2$. 1 – парабола; 2 – трапеция; 3 – треугольник; 4 – прямоугольник; I-IV – квадранты с учетом знаков

Fig. 5. The total plot of shear deformations (stresses)

а – from sections 1-1 to 3-3; б – for a triangle (subtraction of a triangle together with a convex parabola, section 1-1); в – in section 2-2 for a trapezoid (transition from section 1-1 to section 3-3) at $y = b/8$ (with concave parabola); г – $y = b/4$ (with a mixed curve to a rectangle); д – $y = 3b/8$ (with an inverse convex parabola); in section 3-3 for a convex parabola (or for a practical approximate trapezoid); е – for $y = b/2$. 1 – parabola; 2 – trapezoid; 3 – triangle; 4 – rectangle; I-IV – quadrants with signs

Тогда

$$\tau_{zx,t,Q,m} = \frac{\tau_{pl,t,m} Q}{M_t} = \frac{\tau_{zx, M_t, m} M_t \chi}{M_t} = \tau_{pl,t,m} \chi = 2,42 \cdot 0,41 = 0,99 \text{ МПа}; \quad (34)$$

$$\tau_{zx,Q,m} = \tau_{zx} - \tau_{zx, M_t, m} = 0,69 + 0,46 = 1,15 \text{ МПа}. \quad (35)$$

При этом параметр ψ_Q имеет вид:

$$\psi_Q = \frac{\tau_{2,t,zx}}{\tau_{pl,c,zx}} = \frac{1,1 R_{bt}}{R_{ch}} = \frac{1,1 \cdot 2,2 \text{ МПа}}{18,99 \text{ МПа}} = 0,127. \quad (36)$$

Пункт 17. Получим внутренний крутящий момент $M_{t,I}$ из уравнения равновесия в сечении I-I для растянутой и сжатой зоны относительно точки b_1 ($\sum T_{b,I} = 0$, рис. 6):

$$\begin{aligned} M_{t,I} &= M_{t,I,bc} + M_{t,I,bt} = M_{t,I,bc,rig} + M_{t,I,bc,lef} + M_{t,I,bt,rig} + M_{t,I,bt,lef} = \\ &= \tau_{b,zx,c, M_t, rig} \cdot A_{bc,I, rig} \cdot z_{rig} \cdot \omega_{rig} + \tau_{b,zx,c, M_t, lef} \cdot A_{bc,I, lef} \cdot z_{lef} \cdot \omega_{lef} - \\ &- \tau_{b,zx,c, Q, lef} \cdot A_{bc,I, lef} \cdot z_{lef} \cdot \omega_{lef} + \tau_{b,zx,c, Q, rig} \cdot A_{bc,I, rig} \cdot z_{rig} \cdot \omega_{rig} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tau_{pl,t, M_t, rig} \cdot 0,5b(h-x_1)0,25b(1+\eta)_{hor} \omega_{rig} + \\
 & + \tau_{pl,t, M_t, lef} \cdot 0,5b(h-x_1)0,25b(1-\eta)_{hor} \omega_{lef} + \\
 & + \tau_{pl,t, Q} ((0,5b(h-x_1)0,25b(1+\eta)_{hor} \omega_{rig}) - \\
 & - (0,5b(h-x_1)0,25b(1-\eta)_{hor} \omega_{lef})) + 2Q_s \cdot \eta_{hor} + \\
 & + 3Q_s (0,5b - 0,025 + \eta_{hor}) + 3Q_s \cdot (0,5b - 0,025 - \eta_{hor}) = \\
 & = 3,04 \cdot 10^6 \cdot 1210 \cdot 10^{-6} \cdot 76,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 + \\
 & + 3,04 \cdot 10^6 \cdot 990 \cdot 10^{-6} \cdot 56,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 + 1,15 \cdot 10^6 \cdot 1210 \cdot 56,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 + \\
 & + 1,15 \cdot 10^6 \cdot 990 \cdot 56,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 - 1,15 \cdot 10^6 \cdot 1210 \cdot 76,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 + \quad (37) \\
 & + 0,99 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,2(0,2 - 0,011) \cdot 0,25 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,1) - \\
 & - 0,99 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,2(0,2 - 0,011) \cdot 0,25 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,1) + \\
 & + 2,42 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,2(0,2 - 0,011) \cdot 0,25 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,1) + \\
 & + 2,42 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,2(0,2 - 0,011) \cdot 0,25 \cdot 0,2 \cdot (1 + 0,1) + \\
 & + 2 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} \cdot 0,01 + 3 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} \cdot 0,085 + \\
 & + 3 \cdot 21 \cdot 10^6 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} \cdot 0,065 = 5,17 \text{ кНм} .
 \end{aligned}$$

Здесь $\tau_{pl,t,rig} = \tau_{pl,t,lef} = \tau_{pl,t} = \psi_{M_t} \cdot \tau_{pl,u} = 1,1R_{bt}$; $\tau_{pl,u} = R_{ch}$, усилие среза в арматуре принимаем равным 10%, т.е. $Q_s = R_{ch, A240,i} \cdot A_{s,i} = 10\% R_{s,i} \cdot A_{s,i}$.

Погрешность расчетов:

$$\Delta_{M_{t,1}} = \frac{M_{t,1,exp} - M_{t,1}}{M_{t,1,exp}} = \frac{6,25 - 5,17}{6,25} = 17,4\% . \quad (38)$$

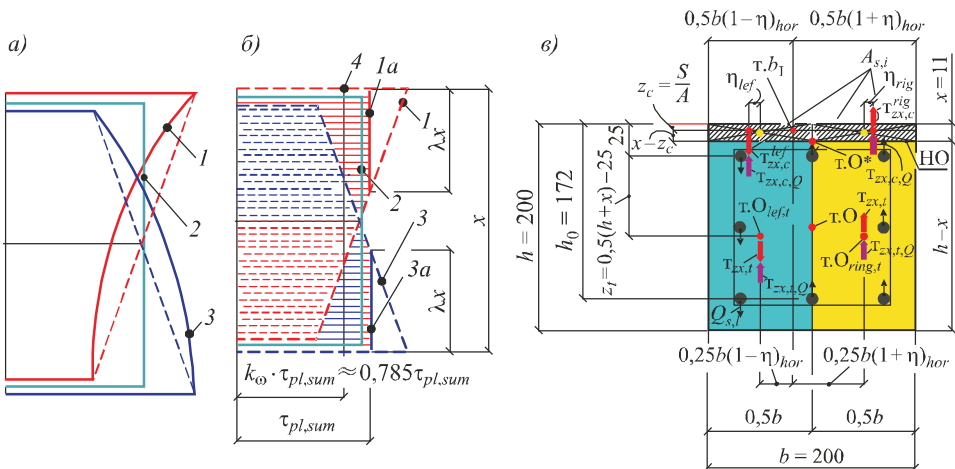


Рис. 6. Момент кручения в сечении I-I

a – угловые деформации; б – касательные напряжения; в – точки и плечи для момента кручения M_t (сжатой и растянутой области)

Fig. 6. Torsion moment in section I-I

a – angular deformations; b – tangential stresses; c – points and shoulders for torsion moment M_t (compressed and stretched area)

Пункт 18. Из уравнения равновесия поперечных внутренних и внешних сил в сечении I-I имеем теоретическую поперечную силу Q_{I-I} ($\Sigma Z = 0$, см. рис. 4):

$$\begin{aligned}
 Q_{I-I} &= Q_{b,c,I-I} + Q_{b,t,I-I} = \tau_{z_x,c,Q} \cdot A_{b,c,I-I} + \tau_{z_x,c,M_t} \cdot A_{b,c,I-I} + \\
 &+ \tau_{z_x,t,Q,m} \cdot \Psi_Q \cdot A_{b,t,I-I} + \tau_{z_x,t,M_t} \cdot \Psi_Q \cdot A_{b,t,I-I} + R_{ch,A240} \sum_{i=1}^{m=8} A_{s,i} = \\
 &= \tau_{z_x,c,Q} \cdot A_{b,c,I-I} + \chi \cdot \tau_{z_x,c,Q} \cdot \Psi_{Q,t,m} \cdot b \cdot (h_0 - x_1) + \tau_{z_x,c,M_t} \cdot A_{b,c,I-I} + \\
 &+ \tau_{z_x,t,M_t} \cdot \Psi_{M_t} \cdot A_{b,t,I-I} - R_{ch,A240} \cdot A_{s,i} \cdot 8 = 1,15 \cdot 10^6 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 + \\
 &+ 3,04 \cdot 10^6 \cdot 1,21 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 + 3,04 \cdot 10^6 \cdot 0,99 \cdot 10^{-3} \cdot 0,785 + 2,42 \cdot 0,41 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \times \\
 &\quad \times (0,2 - 0,011) \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 + 2,42 \cdot 10^6 \cdot 0,09(0,2 - 0,011) \cdot 10^{-3} - \\
 &\quad - 2,42 \cdot 10^6 \cdot 0,11(0,2 - 0,011) \cdot 10^{-3} + 21 \cdot 10^6 \cdot 28,26 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = 13,26 \text{ кН}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Здесь $\tau_{z_x,t,Q,m} = \Psi_Q \cdot \tau_{z_x,c,M_t} \cdot \chi = \Psi_Q \cdot 1,1 R_{bt}$; $Q_s = R_{ch,A240,i} \cdot A_{s,i} = 10 \% R_{s,i} \cdot A_{s,i}$.

Погрешность расчетов:

$$\Delta_{Q_I} = \frac{Q_{I,exp} - Q_I}{Q_{I,exp}} = \frac{15,25 - 13,26}{15,25} = 13,1 \%. \quad (40)$$

Выводы. 1. Разработана практическая модель железобетонной конструкции при действии изгиба с кручением, а также выполнен пример расчета для квадратного поперечного сечения, для расчетных усилий составлены разрешающие уравнения равновесия и деформаций в поперечных сечениях $i-i$ из 1–6 шт., от I-I (начало) до 3-3 (в конец трещины). При этом область сжатого бетона имеет три участка l_1, l_2, l_3 , продольные сечения (l_1 и l_3), а также ломаное сечение на продольном расстоянии l_2 .

2. Из известных усилий составлены разрешающие уравнения равновесия и деформаций и найдены численные значения неизвестных параметров. В сечении I-I (аналогично в сечении III-III) относительно оси y , проходящей через точку O_I приложения равнодействующей изгибающих моментов в растянутой арматуре ($\Sigma M_{O,I} = 0$), получено неизвестное $M_{bend,I}$; из уравнения равновесия проекций внутренних и внешних сил ($\Sigma X = 0$) найдена высота сжатой зоны бетона; из равнодействующей крутящих моментов ($\Sigma M_{t,bI} = 0$) получено неизвестное $M_{t,I}$.

3. «Нагельный» эффект в растянутой продольной и поперечной арматуре, попадающей в пространственное сечение, определялся с привлечением специальной модели второго уровня. При этом для опасной пространственной трещины при проецировании на горизонтальную ось была найдена длина пространственной трещины и принято ограничение.

Список источников

1. *Khaldoun Rahal*. Combined Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete beams Using Simplified Method for Combined Stress-Resultants // *ACI Structural Journal*. 2007. Vol. 104, no. 4. P. 402–411.

2. *Adheena Thomas, Afia S. Hameed.* An Experimental Study on Combined Flexural and Torsional Behaviour of RC Beams // *International Research Journal of Engineering and Technology.* 2017. Vol. 4, Issue 5. P. 1367–1370.
3. *Kim C., Kim S., Kim K.-H., Shin D., Haroon M., Lee J.-Y.* Torsional Behavior of Reinforced Concrete Beams with High-Strength Steel Bars // *Structural Journal.* 2019. Vol. 116. P. 251–233.
4. *Kandekar S.B., Talikoti R.S.* Study of torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened with aramid fiber strips // *International Journal of Advanced Structural Engineering.* 2018. Vol. 10. P. 465–474.
5. *Křístek V., Průša J., Vitek J.L.* Torsion of reinforced concrete structural members // *Solid State Phenomena.* 2018. Vol. 272. P. 178–184. <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.272.178>
6. *Santhakumar R., Dhanaraj R., Chandrasekaran E.* Behaviour of retrofitted reinforced concrete beams under combined bending and torsion: A numerical study // *Electronic Journal of Structural Engineering.* 2007. No. 7. P. 1–7.
7. *Kalkan I., Kartal S.* Torsional rigidities of reinforced concrete beams subjected to elastic lateral torsional buckling // *International Journal of Civil and Environmental Engineering.* 2017. Vol. 11, no. 7. P. 969–972.
8. *Демьянов А.И., Сальников А.С., Колчунов Вл.И.* Экспериментальные исследования железобетонных конструкций при кручении с изгибом и анализ их результатов // *Строительство и реконструкция.* 2017. № 4. С. 17–26.
9. *Травуш В.И., Карпенко Н.И., Колчунов Вл.И., Каприелов С.С., Демьянов А.И., Копорев А.В.* Результаты экспериментальных исследований конструкций квадратного и коробчатого сечений из высокопрочного бетона при кручении с изгибом // *Строительство и реконструкция.* 2018. № 6. С. 32–43.
10. *Kolchunov V.I., Dem'yanov A., Protchenko M.* The new hypothesis angular deformation and filling of diagrams in bending with torsion in reinforced concrete structures // *Journal of Applied Engineering Science.* 2021. Vol. 19, no. 4. P. 972–979. <http://doi.org/10.5937/jaes0-32660>
11. *Yakovenko I., Kolchunov V.I.* The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states // *Journal of Applied Engineering Science.* 2017. Vol. 15, no. 3. P. 366–375. <http://doi.org/10.5937/jaes15-14662>
12. *Bernardo L.* Modeling the full behavior of reinforced concrete flanged beams under torsion // *Applied Sciences.* 2019. Vol. 9, Issue 13. P. 2750. <http://doi.org/10.3390/app9132730>
13. *Nahvi H., Jabbari M.* Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model // *International Journal of Mechanical Sciences.* 2005. Vol. 47. P. 1477–1497.
14. *Demyanov A., Kolchunov V.I.* The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending // *Journal of Applied Engineering Science.* 2017. Vol. 15, no. 3. P. 375–380. <http://doi.org/10.5937/jaes15-14663>
15. *Vishnu H. Jariwalaa, Paresh V. Patel, Sharadkumar P. Purohit.* Strengthening of RC beams subjected to combined torsion and bending with GFRP composites // *Procedia Engineering.* 2013. Vol. 51. P. 282–289.
16. *Tsai H.-C., Liao M.-C.* Modeling torsional strength of reinforced concrete beams using genetic programming polynomials with building codes // *KSCE Journal of Civil Engineering.* 2019. Vol. 23. P. 3464–3475. <http://doi.org/10.1007/s12205-019-1292-7>
17. *Арзамасцев С.А., Родевич В.В.* К расчету железобетонных элементов на изгиб с кручением // *Изв. вузов. Строительство.* 2015. № 9. С. 99–109.

18. Karpyuk V.M., Kostyuk A.I., Semina Y.A. General Case of Nonlinear Deformation-Strength Model of Reinforced Concrete Structures // *Strength of Materials*. 2018. Vol. 50, no. 3. P. 453–454. <http://doi.org/10.1007/s11223-018-9990-9>
19. Jan L., Vitek Jaroslav Průša, Vladimír Křístek L.B. Torsion of Rectangular Concrete Sections // *ACI Symposium Publication*. 2020. Vol. 344. P. 111–130.
20. Rahal K.N. Torsional strength of reinforced concrete beams // *Canadian Journal of Civil Engineering*. 2000. Vol. 27. P. 445–453. doi:10.1139/cjce-27-3-445
21. Lin W. Experimental investigation on composite beams under combined negative bending and torsional moments. *Advances in Structural Engineering*. 2020. Vol. 24. P. 1456–1465. <http://doi.org/10.1177/1369433220981660>
22. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Расчетные модели силового сопротивления железобетона. М.: Изд-во АСВ, 2004. 472 с.
23. Гольщев А.Б., Колчунов В.И. Сопротивление железобетона. Киев: Основа, 2009. 432 с.
24. Колчунов В.И., Демьянов А.И., Протченко М.В. Моменты в железобетонных конструкциях при изгибе с кручением // *Строительство и реконструкция*. 2021. № 3. С. 27–46. <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-95-3-27-46>
25. Демьянов А.И. Расчетные модели деформирования железобетонных конструкций в зданиях и сооружениях при кручении с изгибом // *Строительство и реконструкция*. 2020. № 4. С. 12–28. DOI 10.33979/2073-7416-2020-90-4-12-28
26. Колчунов В.И., Сафонов А.Г. Сложное сопротивление сжатой зоны бетона железобетонных конструкций при кручении // *Изв. Орлов. гос. техн. ун-та. Серия: Строительство и транспорт*. 2009. № 1. С. 38–42.
27. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.

References

1. Khaldoun Rahal. Combined Torsion and Bending in Reinforced and Prestressed Concrete beams Using Simplified Method for Combined Stress-Resultants. *ACI Structural Journal*. 2007; 104(4): 402–411.
2. Adheena Thomas, Afia S. Hameed. An Experimental Study on Combined Flexural and Torsional Behaviour of RC Beams. *International Research Journal of Engineering and Technology*. 2017; 4(5): 1367–1370.
3. Kim C., Kim S., Kim K.-H., Shin D., Haroon M., Lee J.-Y. Torsional Behavior of Reinforced Concrete Beams with High-Strength Steel Bars. *Structural Journal*. 2019; 116: 251–233.
4. Kandekar S.B., Talikoti R.S. Study of torsional behavior of reinforced concrete beams strengthened with aramid fiber strips. *International Journal of Advanced Structural Engineering*. 2018; 10: 465–474.
5. Křístek V., Průša J., Vitek J.L. Torsion of reinforced concrete structural members. *Solid State Phenomena*. 2018; 272: 178–184. <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.272.178>
6. Santhakumar R., Dhanaraj R., Chandrasekaran E. Behaviour of retrofitted reinforced concrete beams under combined bending and torsion: A numerical study. *Electronic Journal of Structural Engineering*. 2007; (7): 1–7.
7. Kalkan I., Kartal S. Torsional rigidities of reinforced concrete beams subjected to elastic lateral torsional buckling. *International Journal of Civil and Environmental Engineering*. 2017; 11(7): 969–972.
8. Demyanov A.I., Salnikov A.S., Kolchunov V.I. Experimental studies of reinforced concrete structures during torsion with bending and analysis of their results. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya = Building and Reconstruction*. 2017; (4): 17–26. (In Russ.).

9. Travush V.I., Karpenko N.I., Kolchunov V.I., Kaprielov S.S., Demyanov A.I., Kononov A.V. The results of experimental studies of structures square and box sections in torsion with bending. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya = Building and Reconstruction*. 2018; (6): 32–43. (In Russ.).
10. Kolchunov V.I., Dem'yanov A., Protchenko M. The new hypothesis angular deformation and filling of diagrams in bending with torsion in reinforced concrete structures. *Journal of Applied Engineering Science*. 2021; 19(4): 972–979. <http://doi.org/10.5937/jaes0-32660>
11. Yakovenko I., Kolchunov V.I. The development of fracture mechanics hypotheses applicable to the calculation of reinforced concrete structures for the second group of limit states. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017; 15(3): 366–375. <http://doi.org/10.5937/jaes15-14662>
12. Bernardo L. Modeling the full behavior of reinforced concrete flanged beams under torsion. *Applied Sciences*. 2019; 9(13): 2750. <http://doi.org/10.3390/app9132730>
13. Nahvi H., Jabbari M. Crack detection in beams using experimental modal data and finite element model. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2005; 47: 1477–1497.
14. Demyanov A., Kolchunov V.I. The dynamic loading in longitudinal and transverse reinforcement at instant emergence of the spatial crack in reinforced concrete element under the action of a torsion with bending. *Journal of Applied Engineering Science*. 2017; 15(3): 375–380. <http://doi.org/10.5937/jaes15-14663>
15. Vishnu H. Jariwalaa, Paresh V. Patel, Sharadkumar P. Purohit. Strengthening of RC beams subjected to combined torsion and bending with GFRP composites. *Procedia Engineering*. 2013; 51: 282–289.
16. Tsai H.-C., Liao M.-C. Modeling torsional strength of reinforced concrete beams using genetic Programming polynomials with building codes. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2019; 23: 3464–3475. <http://doi.org/10.1007/s12205-019-1292-7>
17. Arzamastsev S.A., Rodevich V.V. To the calculation of reinforced concrete elements for bending with torsion. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo = News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2015; (9): 99–109. (In Russ.).
18. Karpyuk V.M., Kostyuk A.I., Semina Y.A. General Case of Nonlinear Deformation-Strength Model of Reinforced Concrete Structures. *Strength of Materials*. 2018; 50(3): 453–454. <http://doi.org/10.1007/s11223-018-9990-9>
19. Jan L., Vitek Jaroslav Průša, Vladimír Krístek L.B. Torsion of Rectangular Concrete Sections. ACI Symposium Publication. 2020; 344: 111–130.
20. Rahal K.N. Torsional strength of reinforced concrete beams. *Canadian Journal of Civil Engineering*. 2000; 27: 445–453. doi:10.1139/cjce-27-3-445
21. Lin W. Experimental investigation on composite beams under combined negative bending and torsional moments. *Advances in Structural Engineering*. 2020; 24: 1456–1465. <http://doi.org/10.1177/1369433220981660>
22. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Computational models of the strength resistance of reinforced concrete. Moscow, 2004. 472 p. (In Russ.).
23. Golyshev A.B., Kolchunov V.I. Resistance of reinforced concrete. Kiev, 2009. 432 p. (In Russ.).
24. Kolchunov V.I., Demyanov A.I., Protchenko M.V. Moments in reinforced concrete structures under bending with torsion. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya = Building and Reconstruction*. 2021; (3): 27–46. (In Russ.). <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2021-95-3-27-46>
25. Demyanov A.I. Calculated models of deformation of reinforced concrete structures in buildings and structures during bending. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya = Building and Reconstruction*. 2020; (4): 12–28. (In Russ.). <http://doi.org/10.33979/2073-7416-2020-90-4-12-28>

26. *Kolchunov V.I., Safonov A.G.* Difficult resistance of the compressed working area of reinforced concrete constructions at torsion with the bending down. *Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i transport = News of the orel state technical university. series: construction and transport.* 2009; (1): 38–42. (In Russ.).
27. *Aleksandrov A.V., Potapov V.D.* Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity. Moscow: Higher school, 1990. 400 p. (In Russ.).

Информация об авторах

Вл.И. Колчунов – член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор

А.В. Козарез – аспирант

М.В. Протченко – аспирант

Information about the authors

Vl.I. Kolchunov – Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, DSc, Professor

A.V. Kozarez – Post-graduate Student

M.V. Protchenko – Post-graduate Student

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 19.11.2021
Одобрена после рецензирования 20.12.2021
Принята к публикации 27.12.2021

The article was submitted 19.11.2021
Approved after reviewing 20.12.2021
Accepted for publication 27.12.2021