

УДК 624.04

М.Н. КИРСАНОВ

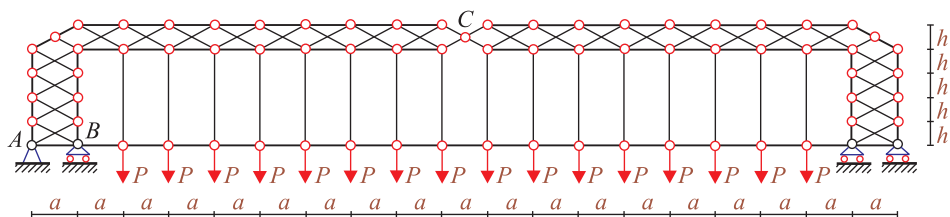
АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ С ПОДВЕСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Приводится вывод аналитической зависимости прогиба фермы рамного типа с подвесным нижним поясом от числа панелей в ригеле и опорах. Для решения задачи используются система компьютерной математики Maple и метод двойной индукции. Графики полученных зависимостей показывают наличие экстремальных точек. Обнаружен случай кинематической изменяемости конструкции. Приведена соответствующая схема возможных скоростей. Исследована асимптотика решения.

Ключевые слова: ферма, рама, подвесные элементы, Maple, индукция, число панелей.

DOI 10.32683/0536-1052-2020-740-8-26-32

Рассмотрим плоскую схему составной плоской рамы с крестообразной решеткой (рис. 1). Число панелей в ригеле $2n$, в боковых опорах – по m . Части рамы соединены шарниром C . Конструкция имеет одну неподвижную шарнирную опору и три подвижных. Это означает, что система внешне статически неопределима – из условия равновесия конструкции в целом найти реакции опор не удастся. Всего в ферме $n_s = 12n + 8m + 18$ стержней, включая пять стержней, моделирующих опоры. Эти стержни в расчете условно считаются недеформируемыми.

Рис. 1. Ферма, $m = 4$, $n = 8$

Ставится задача получить зависимость прогиба конструкции от ее размеров, числа панелей и нагрузки. Ферма статически неопределима только внешне, число стержней в ней (включая опорные) вдвое больше числа внутренних шарниров, поэтому, составляя уравнения равновесия всех узлов, можно получить систему уравнений, из которых определяются как усилия в стержнях, так и реакции опор. Если для решения привлечь какую-либо систему символьной математики, например, Maple, то полученные формулы для усилий позволят вывести и формулу для прогиба. Ряд решений для ферм с разными n и m методом индукции с применением операторов системы Maple могут

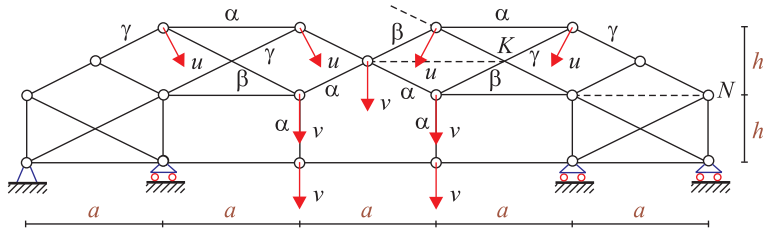


Рис. 2. Схема возможных скоростей изменяемой фермы, $m = n = 1$

быть обобщены на произвольный случай, что составляет основную цель работы. Ранее так были получены решения для плоских статически определенных арочных ферм [1–6], решетчатых [7–14] и пространственных ферм [15].

Для составления и решения системы уравнений равновесия узлов фермы воспользуемся программой [16]. В программу вводятся координаты узлов, порядок соединения стержней (по аналогии с вводом графа в дискретной математике), нагрузки. Первые же расчеты усилий показали, что для четных значений n система уравнений равновесия вырождается, что соответствует кинематическому вырождению самой конструкции – независимо от действующей нагрузки шарниры фермы приобретают некоторые скорости. Подтверждением этого является картина виртуальных скоростей (рис. 2).

При этом часть стержней остается неподвижной. Стержни α имеют поступательное движение, β – вращательное вокруг мгновенных центров скоростей K и N , γ – вращательное. Соотношение скоростей: $v/a = u/c$, где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ – длина раскоса. Такое же распределение скоростей имеют фермы при других нечетных числах панелей в ригеле n . Далее рассматриваются конструкции только с четным числом панелей $n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots$

Распределение усилий в стержнях, полученное графическими средствами Maple, представлено на рис. 3. Красным цветом выделены растянутые стержни, синим – сжатые. Толщина линий пропорциональна модулю усилий. Цифрами указаны усилия, отнесенные к нагрузке P . Интересно отметить несколько неожиданный результат. В верхнем поясе ригеля есть растянутые стержни, а в нижнем – сжатые, а подвесной нижний пояс имеет значительное растягивающее усилие.

Прогиб (вертикальное смещение среднего шарнира C) вычислим по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{v=1}^{n_s-5} S_v^{(P)} S_v^{(1)} l_v / (EF). \quad (1)$$

Здесь $S_v^{(P)}$ – усилие в стержне v от действия нагрузки, $S_v^{(1)}$ – усилие от действия вертикальной единичной силы, приложенной к сочленяющему узлу C ,

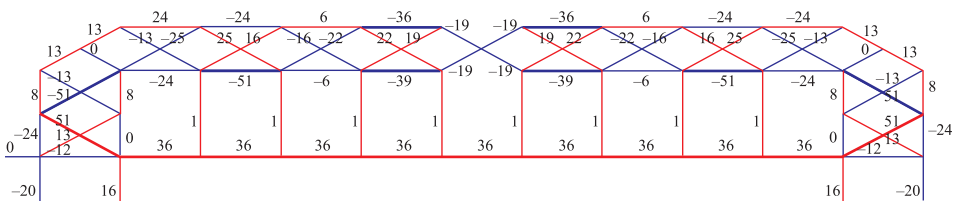


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях, $m = 2, n = 2k = 4, h = 1 \text{ м}, a = 3 \text{ м}$

l_v – длина стержня, EF – жесткость стержня. Площади сечений и модули упругости всех стержней приняты одинаковыми. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме пяти опорных. Расчет прогиба при разных n и m показал, что форма решения не меняется

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(EFh^2). \quad (2)$$

Меняются лишь значения коэффициентов. Вывод зависимости коэффициентов от числа панелей проведем в два этапа. Сначала, фиксируя $m = 1$, найдем последовательность значений C_1 : 86, 732, 2892, 8000, 17970, 35196, 62552, 103392...

Оператор `rgf_findrecur` системы Maple находит рекуррентное уравнение, которому должны удовлетворять члены этой последовательности

$$C_{1,k} = 5C_{1,k-1} - 10C_{1,k-2} + 10C_{1,k-3} - 5C_{1,k-4} + C_{1,k-5}. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) дает оператор `rsolve`

$$C_1 = k(40k^3 + 78k^2 + 46k + 8)/2.$$

Далее, повторяя это решение при $m = 2, 3, 4, \dots$, получаем соответствующие формулы:

$$m = 2: C_1 = k(40k^3 + 62k^2 + 28k + 4)/2,$$

$$m = 3: C_1 = k(40k^3 + 78k^2 + 46k + 8)/2,$$

$$m = 4: C_1 = k(40k^3 + 62k^2 + 28k + 4)/2,$$

....

Обобщая решения по m , а для нормальной работы потребуется десять таких формул, получим в итоге

$$C_1 = k(40k^3 + (70 - 8(-1)^m)k^2 + (37 - 9(-1)^m)k + 6 - 2(-1)^m)/2. \quad (4)$$

Для коэффициента C_2 уравнение – такое же, как (3), а для C_3 – немного проще

$$C_{3,k} = 4C_{3,k-1} - 6C_{3,k-2} + 4C_{3,k-3} - C_{3,k-4}.$$

В результате получим остальные коэффициенты как функции n и m :

$$C_2 = k((10k^2 + 9k + 2)m + 3/2 + 4k^3 + 11k/2 + 8k^2),$$

$$C_3 = k(4m(2m^2 - 3m + 7)k^2 + (9(-1)^m - 9 + 24m - 18m^2 + 12m^3)k - 3 + 3(-1)^m + 8m - 6m^2 + 4m^3)/3. \quad (5)$$

Формула (2) с коэффициентами (3), (5) дает решение поставленной задачи. Для проверки решения можно, во-первых, при выводе поменять порядок индукции по m и n , во-вторых, проверить его численно. Здесь численная проверка проводилась в той же программе, но в численной моде при конкретных m и n .

Аналитическая форма решения удобна не только для использования в расчетах, но и для анализа. Построим кривые полученной зависимости относительного прогиба от числа панелей k при фиксированной длине пролета и суммарной величине нагрузки P_{sum} . Для этого примем: $\Delta' = \Delta EF / (P_{\text{sum}} L)$,

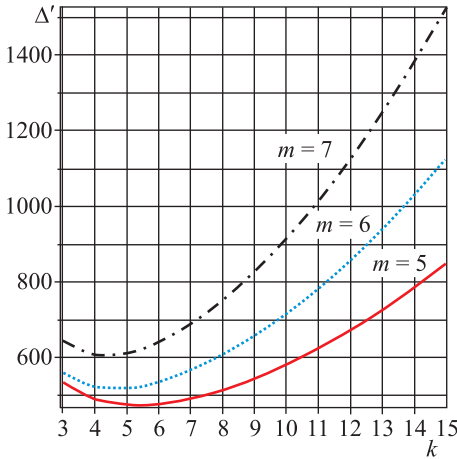


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей в ригеле при разных значениях m , $h = 2$ м, $L = 100$ м

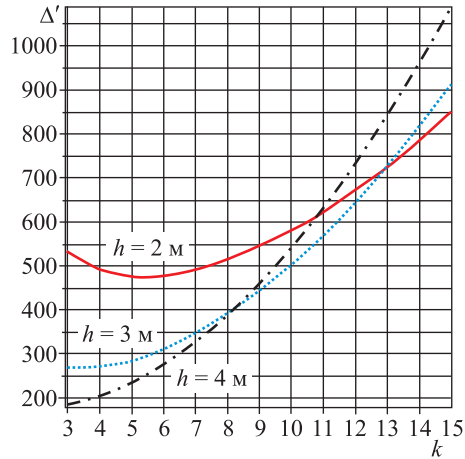


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей в ригеле при разных высотах, $m = 5$, $L = 100$ м

$a = L(2n + 1)$, $P = P_{\text{sum}} / (2n)$. Зависимости обнаруживают явно выраженные экстремумы (рис. 4). С ростом числа панелей m по вертикали растет и прогиб.

Асимптотика этих кривых явно не линейная. Действительно, вычисляя предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^3 = h / L$, получаем, что рост прогиба с увеличением числа панелей имеет кубический характер.

Эти же кривые, построенные для разных высот (рис. 5), также имеют минимумы, но при этом пересекаются. Это означает, что для разных высот h при некотором числе панелей прогиб один и тот же.

Предложенная схема рамы допускает получение точного решения при любом числе панелей. Это означает, что в случае весьма больших значений n и m полученное решение может быть тестом для численного решения, в котором неизбежно накопление ошибок округления. Кроме того, в процессе решения выяснилось весьма коварное свойство конструкции. Для нечетных n она превращается в мгновенно изменяемый механизм. Конечно, в реальных конструкциях редко используют статически определимые схемы, в частности, в узлах фермы ставятся не шарниры, а жесткие соединения, и это как-то компенсирует изменяемость. Однако, зная эту особенность схемы, неразумно использовать четное число n и рассчитывать только на работу жестких узловых заделок. Найденные экстремальные точки (см. рис. 4, 5) указывают на возможность оптимизации конструкции по жесткости, а несколько непривычное распределение сжатых и растянутых стержней по поясам фермы заставляет продуманно относиться к выбору сечений стержней.

Обзоры некоторых работ, использующих метод индукции для вывода аналитических зависимостей прогиба плоских ферм от числа панелей, даны в [1, 17].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. № 1. С. 12–33.
2. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12. С. 74.

3. *Кирсанов М.Н.* Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9. С. 44–55.
4. *Кунов И.М.* О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. № 6-2. С. 253–256.
5. *Компанеев К.А.* Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. № 4. С. 108.
6. *Савиных А.С.* Анализ прогиба арочной раскосной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5, вып. 3. С. 12–17.
7. *Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.* Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Construction mechanics and structures. 2018. No. 2. P. 72–79.
8. *Белякин Н.А., Бойко А.Ю., Плясова А.А.* Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2018. № 3. С. 33–41.
9. *Широков А.С.* Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2. С. 11–14.
10. *Доманов Е.В.* Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2. С. 15–19.
11. *Тиньков Д.В.* Формулы для расчета прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2, № 13. С. 10–14.
12. *Белякин Н.А., Бойко А.Ю.* Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. № 1. С. 21–29.
13. *Арутюнян В.Б.* Формулы для расчета прогиба плоской раскосной фермы с параллельными поясами // Строительная механика и конструкции. 2018. № 4. С. 29–37.
14. *Ткачук Г.Н.* Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. № 2. С. 32–39.
15. *Кирсанов М.Н.* Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2018. № 4. С. 52–57.
16. *Kirsanov M.N.* Planar Trusses: Schemes and Formulas. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2019. 198 p.
17. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5. С. 66–73.

Кирсанов Михаил Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва
Воронежский государственный технический университет

Получено 29.07.2020

Kirsanov Mikhail Nikolaevich, DSc, Professor
National Research University «Moscow Power Engineering University»
Voronezh State Technical University, Russia

ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION OF A FRAME-TYPE TRUSS WITH SUSPENDED ELEMENTS AND AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

The analytical dependence of the deflection of a frame-type truss with a suspended lower belt on the number of panels in the crossbar and supports is found. To solve this problem, we use the Maple computer mathematics system and the double induction method. Graphs

of the obtained dependencies show the presence of extreme points. A case of kinematic design variability was found. The corresponding scheme of possible velocity given. The asymptotic behavior of the solution is investigated.

Key words: truss, frame, suspension elements, Maple, induction, number of panels.

REFERENCES

1. *Osadchenko N.V.* Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa [Analytical solutions to problems of deflection of flat trusses of arch type]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktсии* [Construction mechanics and structures]. 2018. No. 1. Pp. 12–33. (in Russian)
2. *Tinkov D.V.* Raschet progiba ploskoy arochnoy fermy s krestoobraznoy reshetkoy [Calculation of deflection of a flat arched truss with a cross-shaped grid]. *Postulat* [Postulate]. 2017. No. 12. P. 74. (in Russian)
3. *Kirsanov M.N.* Sravnitel'nyy analiz zhestkosti dvukh skhem arochnoy fermy [Comparative analysis of the rigidity of two arch truss schemes]. *Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy* [Construction of unique buildings and structures]. 2015. No. 9. Pp. 44–55. (in Russian)
4. *Kunov I.M.* O zhestkosti arochnoy fermy treugol'nogo ochertaniya v zavisimosti ot pereraspredeleniya ploshchadey sterzhney i chisla paneley [On the rigidity of an arched truss of triangular shape depending on the redistribution of rod areas and the number of panels]. *Nauchnyy al'manakh* [Science Almanac]. 2016. No. 6-2. Pp. 253–256. (in Russian)
5. *Kompaneets K.A.* Raschet smeshcheniya podvizhnoy opory ploskoy arochnoy raskosnoy fermy pri nagruzke v seredine proleta [Calculation of the displacement of the movable support of a flat arched diagonal truss under load in the middle of the span]. *Molodezh' i nauka* [Youth and science]. 2017. No. 4. P. 108. (in Russian)
6. *Savinykh A.S.* Analiz progiba arochnoy raskosnoy fermy, nagruzhennoy po verkhnemu poyasu [Analysis of the deflection of an arched slanting truss loaded along the upper belt]. *Stroitel'stvo i arkhitektura* [Construction and architecture]. 2017. Vol. 5, No. 3. Pp. 12–17. (in Russian)
7. *Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A.* Analytical calculation and analysis of planar springel truss. *Construction mechanics and structures*. 2018. No. 2. Pp. 72–79.
8. *Belyankin N.A., Boyko A.Yu., Plyasova A.A.* Induktivnyy analiz deformativnosti mnogoreshchatoy fermy pri nesimmetrichnom zagruzhении [Inductive analysis of the deformability of a multi-lattice truss under asymmetric loading]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktсии* [Construction mechanics and structures]. 2018. No. 3. Pp. 33–41. (in Russian)
9. *Shirokov A.S.* Analiticheskiy raschet smeshcheniya opory balochnoy fermy s verkhnimi shprengelyami [Analytical calculation of the displacement of the support of a beam truss with upper sprengels]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktсии* [Construction mechanics and structures]. 2017. No. 2. Pp. 11–14. (in Russian)
10. *Domanov E.V.* Vyvod formuly dlya progiba balochnoy fermy s krestoobraznoy reshetkoy [Derivation of the formula for deflection of a beam truss with a cross-shaped grid]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktсии* [Construction mechanics and structures]. 2017. No. 2. Pp. 15–19. (in Russian)
11. *Tinkov D.V.* Formuly dlya rascheta progiba vsparushennoy balochnoy raskosnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley [Formulas for calculating the deflection of a collapsed beam bracing truss with an arbitrary number of panels]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktсии* [Construction mechanics and structures]. 2016. Vol. 2, No. 13. Pp. 10–14. (in Russian)

12. *Belyankin N.A., Boyko A.Yu.* Formuly dlya progiba balochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley pri ravnomernom zagruzhении [Formulas for deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels under uniform loading]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii* [Construction mechanics and structures]. 2019. No. 1. Pp. 21–29. (in Russian)
13. *Arutyunyan V.B.* Formuly dlya rascheta progiba ploskoy raskosnoy fermy s parallel'nymi poyasami [Formulas for calculating the deflection of a flat diagonal truss with parallel belts]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii* [Construction mechanics and structures]. 2018. № 4. Pp. 29–37. (in Russian)
14. *Tkachuk G.N.* Formula zavisimosti progiba nesimmetrichno nagruzhennoy ploskoy fermy s usilennymi raskosami ot chisla paneley [Formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii* [Construction mechanics and structures]. 2019. No. 2. Pp. 32–39. (in Russian)
15. *Kirsanov M.N.* Analiz zavisimosti progiba fermy pryamougol'nogo pokrytiya ot chisla paneley [Analysis of the dependence of the deflection of a rectangular covering truss on the number of panels]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii* [Construction mechanics and structures]. 2018. No. 4. Pp. 52–57. (in Russian)
16. *Kirsanov M.N.* Planar Trusses: Schemes and Formulas. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing, 2019. 198 p.
17. *Tinkov D.V.* Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktziy [Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2015. No. 5. Pp. 66–73. (in Russian)