

---

# ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

## THE THEORY OF STRUCTURES

Известия вузов. Строительство. 2022. № 5. С. 5–13.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2022; (5): 5–13.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 624.041.5

DOI: 10.32683/0536-1052-2022-761-5-5-13

### ПРОГИБ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

**Михаил Николаевич Кирсанов**

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия

**Аннотация.** Предложена схема плоской статически определимой фермы распорного типа с крестообразной решеткой на двух неподвижных шарнирных опорах. С использованием системы компьютерной математики Maple методом индукции по результатам расчетов последовательности ферм с различным числом панелей выведены формулы зависимости прогиба от числа панелей, размеров и нагрузки. Варианты нагрузки: равномерно распределенная по узлам верхнего пояса и сосредоточенная в середине пролета. Для расчета прогиба использована формула Максвелла – Мора. Жесткости всех стержней приняты одинаковыми. Приведено распределение усилий по стержням конструкции и формулы для определения усилий в некоторых стержнях и реакций опор внешне статически неопределимой конструкции. Найдена линейная асимптотика зависимости прогиба от числа панелей.

**Ключевые слова:** решетчатая ферма, прогиб, индукция, число панелей, асимптотика

**Благодарности:** исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

**Для цитирования:** Кирсанов М.Н. Прогиб арочной фермы с произвольным числом панелей. Аналитическое решение // Известия вузов. Строительство. 2022. № 5. С. 5–13. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-761-5-5-13.

Original article

### DEFLECTION OF AN ARCH TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS. ANALYTICAL SOLUTION

**Mikhail N. Kirsanov**

National Research University «MPEI», Moscow, Russia

**Abstract.** A scheme of a planar statically determinate spacer-type truss with a cruciform lattice on two fixed hinged supports is proposed. Using the Maple computer

---

© Кирсанов М.Н., 2022

mathematics system, by induction, based on the results of calculations of a sequence of trusses with a different number of panels, formulas are derived for the dependence of the deflection on the number of panels, dimensions and load. The load is considered uniformly distributed over the nodes of the upper chord and concentrated in the middle of the span. To calculate the deflection, the Maxwell – Mohr formula is used. The rigidity of all rods is assumed to be the same. The distribution of forces over the elements of a structure and formulas for determining the forces in some elements and the reactions of supports of an externally statically indeterminate structure are given. A linear asymptotics of the dependence of the deflection on the number of panels is found.

**Keywords:** lattice truss, deflection, induction, number of panels, asymptotics

**Acknowledgments:** the research was carried out with the support of the Interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University “Fundamental and Applied Space Research”.

**For citation:** Kirsanov M.N. Deflection of an arch truss with an arbitrary number of panels. Analytical solution. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2022; (5): 5–13. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2022-761-5-5-13.

Как правило, расчет деформаций и усилий в строительных конструкциях производится численно, в основном методом конечных элементов [1–5]. В качестве альтернативы и для тестовых расчетов простых статически определимых схем конструкций применяется аналитический метод расчета [6–10]. Формулы зависимости прогиба от числа панелей для плоских внешне статически неопределимых ферм в системе Maple получены в [10–12]. Аналитические методы расчета, основанные на системах компьютерной математики, применимы и в задачах определения частот собственных колебаний ферм. Оценка нижних границ собственных частот некоторых статически определимых регулярных плоских ферм в аналитической форме по методу Донкерлея с использованием системы Maple дана в [8, 9, 13, 14]. Аналитический расчет прогиба пространственной фермы с произвольным числом панелей выполнен в [15]. В монографии В.А. Игнатьева [16] приведены алгоритмы и аналитические расчеты деформаций и частот колебаний некоторых регулярных стержневых конструкций. В справочнике [17] содержатся формулы для расчета прогиба и усилий в различных плоских регулярных статически определимых фермах с произвольным числом панелей под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок. Постановка задачи поиска и расчета плоских и пространственных статически определимых регулярных ферм впервые проведена R.G. Hutchinson и N.A. Fleck [18, 19].

В настоящей работе предлагается схема регулярной арочной фермы с крестообразной решеткой (рис. 1). Ставится задача вывести формулу зависимости прогиба фермы от числа панелей. Длина пролета конструкции  $L = AB = 2(n + 3)a$ , где  $2n$  – число панелей в горизонтальной части ригеля. Общая высота фермы  $5h$ .

Конструкция состоит из  $K = 8n + 44$  стержней, включая четыре стержня, моделирующие неподвижные шарнирные опоры. Суммарная длина всех стержней конструкции  $2(2n + 3)a + (4n + 19)c + 4d + 8h$ , где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ . Вертикальные боковые опорные части фермы содержат по три панели. Расчет прогиба (смещение центрального узла ригеля  $C$ ) выпол-



фермы:  $a = 4\text{ м}$ ,  $h = 2\text{ м}$ . Значения усилий округлены до двух знаков и отнесены к нагрузке  $P$ . Толщина отрезков, изображающих стержни, условно пропорциональна модулям усилий в этих стержнях. Сжатые стержни обозначены синим цветом, растянутые – красным. Стержни, не несущие нагрузку, показаны тонкими линиями черного цвета. Почти весь верхний пояс при такой нагрузке растянут, нижний пояс – сжат. При этом оказывается, что наиболее растянутые и сжатые стержни при  $n = 2$  находятся не в середине пролета, а в наклонных нижних боковых частях ригеля. Распределение усилий с такой особенностью характерно для ферм с крестообразной решеткой [11].

Усилия в некоторых наиболее сжатых и растянутых стержнях можно найти аналитически как функцию числа панелей. Например, для верхнего стержня в наклонной части консоли (см. рис. 3) в результате расчета ферм порядка 1, ..., 5 имеем следующую последовательность значений:

$$O_1(1) = 2Pc/h, O_1(2) = 17Pc/(2h), O_1(3) = 15Pc/h, O_1(4) = 43Pc/(2h), \\ O_1(5) = 28Pc/h, \dots$$

Общий член этой последовательности определяется средствами системы компьютерной математики Maple

$$O_1 = Pc(13n - 9)/(2h).$$

Аналогично находятся зависимости от числа панелей других усилий и реакций опор:

$$O_2 = -Pa(n^2 - 6n + 4)/(2h), D_1 = -Pc/(2h), D_2 = 0, \\ U_1 = -Pc(15n - 8)/(2h), U_2 = Pa(n^2 - 9n + 4)/(2h), \\ X_A = Pa(3n + 1)/(2h), Y_A = P(2n + 7)/2.$$

Заметим, что усилия  $O_2$  и  $U_2$  меняют знак при увеличении числа панелей.

**Вычисление прогиба.** Прогиб фермы (вертикальное смещение среднего узла  $C$  в нижнем поясе ригеля) определяется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{K-4} S_j^{[P]} S_j^{[1]} l_j / (EF). \quad (1)$$

Суммирование ведется по всем деформируемым стержням конструкции, кроме четырех недеформируемых опорных. Обозначено:  $S_j^{[P]}$  – усилие в стержне с номером  $j$  от действия внешней нагрузки;  $S_j^{[1]}$  – усилие в этом же стержне от действия единичной безразмерной силы, приложенной к узлу  $C$ . Длина стержня вычисляется по координатам его концов. Жесткость сечений всех стержней  $EF$ .

Расчет прогиба по формуле (1) последовательности пяти ферм с увеличивающимся числом панелей дает следующие значения:

$$\Delta_1 = P(16a^3 + 32c^3 + 5d^3 + 11h^3)/(h^2 EF), \\ \Delta_2 = P(178a^3 + 264c^3 + 55d^3 + 49h^3)/(h^2 EF), \\ \Delta_3 = P(71a^3 + 159c^3 + 35d^3 + 37h^3)/(h^2 EF),$$

$$\Delta_4 = P(493a^3 + 622c^3 + 138d^3 + 110h^3)/(h^2EF),$$

$$\Delta_5 = P(90a^3 + 288c^3 + 65d^3 + 63h^3)/(h^2EF), \dots$$

Обобщение этих формул на произвольное число панелей  $n$  дает иско- мую зависимость

$$\Delta = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3)/EF, \quad (2)$$

где коэффициенты  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (10n^4 - 6(6(-1)^n + 25)n^3 + (752 + 414(-1)^n)n^2 + \\ &+ 3(197 + 67(-1)^n)n - 444 - 204(-1)^n)/24, \\ C_2 &= (2n^2 + 20(23(-1)^n + 48)n - 491 - 245(-1)^n)/8, \\ C_3 &= ((113 + 53(-1)^n)n - 76 - 36(-1)^n)/4, \\ C_4 &= ((87 + 35(-1)^n)n - 28 - 20(-1)^n)/4. \end{aligned} \quad (3)$$

Для случая сосредоточенной нагрузки (см. рис. 2) зависимость прогиба от числа панелей будет иметь такой же вид (2), но с более простыми коэффици- циентами:

$$\begin{aligned} C_1 &= (4n^3 - 9(5 + 3(-1)^n)n^2 + (207(-1)^n + 239)n + 297 + 219(-1)^n)/12, \\ C_2 &= (148 + 115(-1)^n + n)/2, \\ C_3 &= (53(-1)^n + 69)/4, \\ C_4 &= (51 + 35(-1)^n)/4. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения имеют вид полиномов по числу панелей. Порядок полиномов для сосредоточенной нагрузки ниже, чем для распределенной. В процессе получения решения (3) потребовалось составить и решить однородное ре- куррентное уравнение девятого порядка. Формулы (4) получены из решений рекуррентных уравнений от второго до пятого порядка, а преобразования потребовали значительно меньше времени. Символьный процессор в Maple выполняет преобразования значительно медленнее, чем численный процес- сор этой же системы.

**Численный пример.** Рассмотрим зависимость прогиба от числа пане- лей для фермы длины  $L = 2(2n + 3)a = 60$  м с общей нагрузкой на верхний пояс  $P_0 = (2n + 7)P$  (рис. 4). Обозначим безразмерный прогиб, отнесенный к суммарной нагрузке и длине пролета:  $\Delta' = EF\Delta/(P_0L)$ . Кривые, построен- ные по формулам (2), (3), соответствуют различным высотам фермы. Обна- руживаются значительные скачки значений прогиба. В зависимости от чет- ности числа панелей величина относительного прогиба может меняться в несколько раз. Особенно заметны скачки в начале графика, при малом числе панелей. С увеличением числа  $n$  скачки сглаживаются. Скачкообраз- ное изменение прогиба не скрывает существующей наклонной асимптоты найденной зависимости. Угол наклона асимптоты находится как предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'/n = h/(8L)$ .

Как и следовало предполагать, фермы с меньшей высотой  $h$  имеют боль- ший прогиб. Зависимость прогиба от числа панелей при нагружении фермы

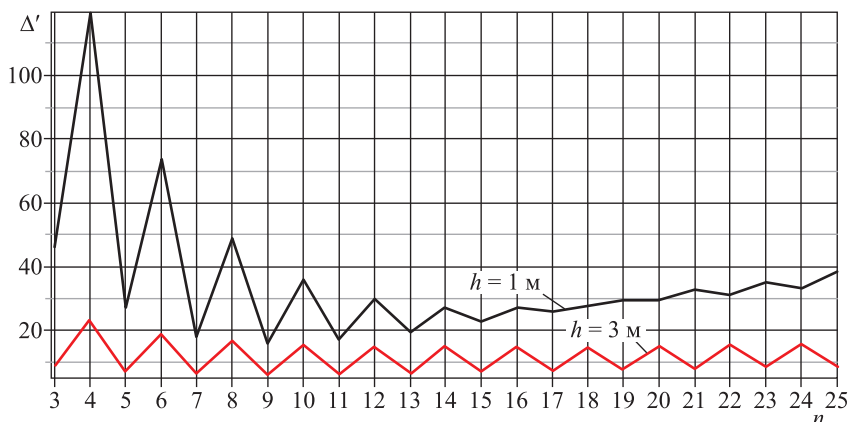


Рис. 4. Зависимость относительного прогиба от числа панелей,  $L = 60$  м

Fig. 4. Dependence of the relative deflection on the number of panels,  $L = 60$  m

сосредоточенной силой (см. рис. 2) качественно имеет такой же вид и асимптоту:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'/n = h/(2L)$ .

**Заключение.** Предложенная схема статически определимой распорной фермы допускает вывод аналитической зависимости прогиба от числа панелей, нагрузки и размеров. Полученные формулы могут быть использованы для оценки численных решений этой конструкции с учетом всех тех параметров, которые для максимального упрощения конструкции не использовались в рассмотренной модели. В частности, численным методам доступен и статически неопределимый вариант этой фермы с жесткими соединениями элементов вместо шарнирных связей. При этом следует обратить внимание на то, что зависимость прогиба от числа панелей имеет скачкообразный характер. Изменение в проекте сооружения числа панелей всего на одну может изменить жесткость фермы в несколько раз. При  $h = 1$  до  $n = 18$  фермы с четным числом панелей в половине длины ригеля более жесткие, при  $n > 18$  эффект обратный: более жесткими становятся фермы с нечетным числом  $n$ .

Аналитическое решение применимо для ферм с весьма большим числом панелей. Погрешность вычислений в этом случае, в отличие от численного решения, не накапливается в процессе решения («проклятие размерности»), а сам расчет не требует больших вычислительных мощностей. Найдены некоторые асимптотики решения. Картина распределения усилий в решетке фермы показала, что наиболее нагруженные стержни не обязательно находятся в середине пролета. Для наиболее критичных к потере прочности или устойчивости стержней и для реакций опор получены компактные формулы, справедливые для любого числа панелей. Алгоритм, примененный в решении поставленной задачи, может быть перенесен и на другие регулярные строительные конструкции.

#### Список источников

1. Siriguleng B., Zhang W., Liu T., Liu Y.Z. Vibration modal experiments and modal interactions of a large space deployable antenna with carbon fiber material and ring-truss structure // Engineering Structures. 2020. No. 207. P. 109932.

2. Быков П.А., Енджиевский Л.В. Напряженно-деформированное состояние узловых соединений трубчатых профилей в стеклопластиковых конструкциях покрытия // Изв. вузов. Строительство. 2010. № 11-12. С. 3–10.
3. Коротких А.В., Гербер А.А., Крылов И.И. Особенности работы фермы с перекрестной решеткой из тонкостенных оцинкованных профилей // Изв. вузов. Строительство. 2011. № 10. С. 9–20.
4. Rybakov V.A., Gamayunova O. The stress-strain state of frame constructions' elements from thin-walled cores // Construction of Unique Buildings and Structures. 2013. Vol. 12, no. 7. P. 79–123.
5. Тукалов Y. Optimal shape of arch concrete block bridge // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 93, no. 8. P. 9307.
6. Dai Q. Analytical dependence of planar truss deformations on the number of panels // AlfaBuild. 2021. No. 2. P. 1701.
7. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапециевидной формы от числа панелей // Строит. механика и конструкции. 2020. № 3. С. 13–20.
8. Петрченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строит. механика и конструкции. 2020. № 3. С. 21–29.
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 3. P. 10101.
10. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строит. механика и конструкции. 2020. № 4. С. 16–25.
11. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строит. механика и конструкции. 2021. № 2. С. 29–37.
12. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Стр-во и архитектура. 2017. Т. 5, № 2. С. 50–54.
13. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строит. механика и конструкции. 2020. № 1. С. 25–38.
14. Vorobiev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92, no. 7. P. 9204.
15. Курсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строит. механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 2–6.
16. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов, 1973. 433 с.
17. Курсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: Справ. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
18. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Part. 85, no. 9. P. 607–617.
19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54, no. 4. P. 756–782.

### References

1. Siriguleng B., Zhang W., Liu T., Liu Y.Z. Vibration modal experiments and modal interactions of a large space deployable antenna with carbon fiber material and ring-truss structure. *Engineering Structures*. 2020; (207): 109932.

2. Bykov P.A., Endzhievskiy L.V. Stress-strain state of nodal joints of tubular profiles in fiberglass coating structures. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo = News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2010; (11-12): 3–10. (In Russ.).
3. Korotkikh A.V., Gerber A.A., Krylov I.I. Features of the work of a farm with a cross lattice made of thin-walled galvanized profiles. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo = News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2011; (10): 9–20. (In Russ.).
4. Rybakov V.A., Gamayunova O. The stress-strain state of frame constructions' elements from thin-walled cores. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2013; 12(7): 79–123.
5. Tyukalov Y. Optimal shape of arch concrete block bridge. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020; 93(8): 9307.
6. Dai Q. Analytical dependence of planar truss deformations on the number of panels. *AlfaBuild*. 2021; (2): 1701.
7. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deformations of a trapezoidal girder on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii = Structural mechanics and structures*. 2020; (3): 13–20. (In Russ.).
8. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii = Structural mechanics and structures*. 2020; (3): 21–29. (In Russ.).
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022; (3): 10101.
10. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii = Structural mechanics and structures*. 2020; (4): 16–25. (In Russ.).
11. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii = Structural mechanics and structures*. 2021; (2): 29–37. (In Russ.).
12. Astakhov S.V. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan. *Stroitel'stvo i arkhitektura = Construction and Architecture*. 2017; 5(2): 50–54. (In Russ.).
13. Vorobiev O.V. On methods of obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii = Structural mechanics and structures*. 2020; (1): 25–38. (In Russ.).
14. Vorobiev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020; 92(7): 9204.
15. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial rod regular structure with a planar face. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy = Building mechanics and calculation of structures*. 2015; (2): 2–6. (In Russ.).
16. Ignatiev V.A. Calculation of regular rod systems. Saratov, 1973. 433 p. (In Russ.).
17. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a Handbook. Moscow: INFRA-M, 2019. 238 p. (In Russ.).
18. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. 2005; 85(9): 607–617.
19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4): 756–782.



**Информация об авторе**

**М.Н. Кирсанов** – доктор физико-математических наук, профессор

**Information about author**

**M.N. Kirsanov** – DSc, Professor

Статья поступила в редакцию 18.03.2022

Одобрена после рецензирования 18.04.2022

Принята к публикации 25.04.2022

The article was submitted 18.03.2022

Approved after reviewing 18.04.2022

Accepted for publication 25.04.2022