УДК 624.072.233.5

Е.Н. ЖУРАВЛЁВА, В.А. МИТРОШИН

УЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА В БАЛКАХ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В данной работе построено решение для балки, лежащей на линейно-деформируемом основании, при учете сдвиговой жесткости. Рассматриваемая задача сводится к решению парных интегральных уравнений, которые приводятся к уравнению Фредгольма второго рода, и к системе дифференциальных уравнений, учитывающих раздельно перемещения от сдвига и изгиба. Такое разделение позволит значительно упростить решение задачи. В качестве примера рассмотрена задача о балке при различных показателях гибкости, соотношениях сторон, а также различных значениях толщины упругого слоя и в пределе полупространства под действием сосредоточенной силы, приложенной в начале координат.

Ключевые слова: балка, деформация сдвига, упругое полупространство, упругий слой, интегральные уравнения.

DOI 10.32683/0536-1052-2021-746-2-33-40

Практически все инженерные сооружения в той или иной степени взаимодействуют с подстилающим их основанием, причем эффект этого взаимодействия может быть весьма значительным. Исследование конструкций, работающих совместно с линейно-деформируемым основанием [1–5], и проблема дальнейшего совершенствования существующих и создание новых методов расчета, учитывающих особенности реальных сооружений, являются важными и актуальными [6–11]. Хорошие результаты, полученные при численном решении контактных задач методом интегральных уравнений [12–17], – основание для их дальнейшей разработки и применения в инженерных задачах.

Цель данной работы заключается в построении решения для балки, лежащей на линейно-деформируемом основании с учетом сдвиговой жесткости, так как обычная теория изгиба балок конечной длины на упругом основании не учитывает влияния сдвигов на форму упругой линии балок. Следует отметить, что исследований в этом направлении имеется очень мало. Плоские контактные задачи для балки с учетом сдвиговой жесткости, лежащей на винклеровском основании, рассматривались в работах [18, 19]. Пространственные задачи для балок в данной постановке для других частных случаев линейно-деформируемого основания остались неизученными.

Оценим влияние сдвига на перемещения и усилия в балке конечной ширины $2b$ и длины $2l$. Рассматриваемая задача сводится к решению парных интегральных уравнений.

$$\begin{gathered}\int_0^\infty P(\xi)C(\xi)\cos(\xi x)\,d\xi = \omega(x),\ 0<x<l \\ \int_0^\infty P(\xi)\cos(\xi x)\,d\xi = 0,\ \ l<x<\infty,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\omega(x) = \omega^u(x) + \omega^c(x)$ – полный прогиб, $\omega^u(x)$ – прогиб от изгиба, $\omega^c(x)$ – прогиб от сдвига,

$$P(\xi) = \frac{g\left(1 + \dfrac{EI}{k'A\sigma}\xi^2\right)}{1 + \dfrac{EI}{k'A\sigma}\xi^2 + EIC(\xi)\xi^4}, \tag{2}$$

где σ – модуль сдвига;
A – площадь поперечного сечения;
k' – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Функциональная характеристика ядра $C(\xi)$ определяется выражением

$$C(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty c(\xi,\beta)\frac{\sin b\beta}{\beta}d\beta. \tag{3}$$

Прогиб $\omega(x)$ должен также удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия балки, продифференцировав которые по x получим для балки конечной ширины следующие зависимости:

$$\begin{aligned} EI\frac{d^4\omega^u(x)}{dx^4} &= g(x) - P(x),\\ -k'\frac{d^2\omega^c(x)}{dx^2}h\sigma &= g(x) - P(x), \end{aligned} \tag{4}$$

где h – высота балки.

Таким образом, данная задача сводится к решению интегральных уравнений (1) и системы дифференциальных уравнений (4). Прогибы от сдвига, изгиба и нагрузку разложим в ряд по соответствующим собственным функциям, а коэффициенты разложения определим из удовлетворения граничным условиям по краям балки соответственно для сдвига и изгиба.

I. Разложим нагрузку $g(x)$, амплитуду прогиба от изгиба в ряд относительно функции $\Psi_m(x_0)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\frac{d^4}{dx_0} - k_m^4\right)\Psi_m(x_0) = 0 \tag{5}$$

и граничным условиям

$$\frac{d^2\Psi_m(x_0)}{dx_0^2} = \frac{d^3\Psi_m(x_0)}{dx_0^3} = 0, \tag{6}$$

где $x_0 = \dfrac{x}{l}$ – безразмерная координата, l – половина длины балки.

В результате получим зависимость между коэффициентами соответствующих разложений:

$$W_m = \frac{l^4}{EI}\frac{g_m - \dfrac{k_m}{l}\overline{P}_m}{k_m^4}, \tag{7}$$

где $k_m = \dfrac{\omega^2 m l^4}{EI}$,

$$\overline{P}_m = \frac{1}{l}\int_0^l P_1(x)\overline{\Psi}_m(x_0)dx, \tag{8}$$

$$P_1(x) = \int_0^l P(x)dx, \tag{9}$$

$$g_m = \frac{1}{l}\int_0^l g(x)\Psi_m(x_0)dx, \tag{10}$$

$$\overline{\Psi}_m = A_m\left(\sin k_m x_0 + \frac{\cos k_m}{\cosh k_m}\sinh k_m x_0\right). \tag{11}$$

II. Получим соотношение, аналогичное (7), учитывая только перемещения от сдвига. Разложим нагрузку $g(x)$, амплитуду прогиба от сдвига в ряд относительно функции $\Psi_n(x_0)$, удовлетворяющей уравнению:

$$\left(\frac{d^2}{dx_0^2} + k_n^2\right)\Psi_n(x_0) = 0; \quad k_n^2 = \frac{\omega^2 ml^2}{k'h\sigma} \tag{12}$$

и граничным условиям $\dfrac{\omega^c(x_0)}{dx_0} = 0.$

Проделав преобразования, аналогичные тем, которые были сделаны при решении задачи о балке единичной ширины [20], получим:

$$W_n = \frac{g_n - \dfrac{k_n}{l}\overline{P}_n}{k_n^2}\frac{l^2}{k'h\sigma}, \tag{13}$$

где $k_n^2 = \dfrac{\omega^2 ml^2}{EI}$,

$$\overline{P}_n = \frac{1}{l}\int_0^l P_1(x)\overline{\Psi}_n(x_0)dx, \tag{14}$$

$$P_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P}_n\overline{\Psi}_n(x_0), \tag{15}$$

$$\overline{\Psi}_n = A_n\sin(k_n x_0). \tag{16}$$

Интегральные уравнения (1) после преобразований и разделения перемещений от сдвига и изгиба сводятся к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$G(\eta) + \int_0^l G(\eta_1)K(\eta,\eta_1)\eta_1 d\eta_1 = \frac{2}{\pi\beta}\frac{1}{\eta}\left[F(0) + \eta\int_0^\eta \frac{F'(x)dx}{\sqrt{\eta^2 - x^2}}\right], \tag{17}$$

где $K(\eta,\eta_1)$ – ядро интегрального уравнения.

$$K(\eta,\eta_1) = \int_0^\infty \xi\left[\frac{\xi}{\beta}C(\xi) - 1\right]J_0(\xi\eta)J_0(\xi\eta_1)d\xi, \tag{18}$$

$J_0(\xi\eta)$, $J_0(\xi\eta_1)$ – цилиндрические функции первого рода нулевого порядка.

Вычислив интегралы в правой части уравнения (17), получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\frac{l^2}{Bk'h\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n-\frac{k_n}{l}\overline{P}_n}{k_n^2}\omega_n(\overline{\eta})+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{l^4}{BEI}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g_m-\frac{k_m}{l}\overline{P}_m}{k_n^4}\omega_m(\overline{\eta}), \qquad (19)$$

где

$$\omega_n(\overline{\eta})=\sqrt{\frac{\pi}{2}}A_nJ_0(k_n\overline{\eta}), \qquad (20)$$

$$\omega_m(\overline{\eta})=\sqrt{\frac{\pi}{2}}A_m\left[J_0(k_m\overline{\eta})+\frac{\cos k_m}{\cosh k_m}I_0(k_m\overline{\eta})\right]. \qquad (21)$$

В выражение (19) входят величины σ и B, равные соответственно:

$$B=\frac{2(1-\mu_0^2)}{EI}, \qquad (22)$$

$$\sigma=\frac{E}{2(1-\mu_1)}, \qquad (23)$$

где μ_0, μ_1 – коэффициент Пуассона соответственно для основания и балки.

Положим $\frac{1+\mu_1}{k'}=1{,}56$, включив тем самым в решение задачи значения коэффициента Пуассона и формы поперечных сечений большого класса балок, представляющих практический интерес. Перенесем в левую часть уравнения слагаемые из правой части, содержащие $\overline{P}_m$, $\overline{P}_n$, тогда ядро интегрального уравнения примет вид

$$K(\eta,\eta_1)=\int_0^{\infty}\xi\left[\frac{\xi^{2\mu}C(\xi)}{B}-1\right]J_{1/2-\mu}(\xi\overline{\eta})I_{1/2-\mu}(\xi\overline{\eta}_1)d\xi+$$

$$+\frac{t}{l^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m^2\left[J_0(k_m\overline{\eta})+\frac{\cos k_m}{\cosh k_m}I_0(k_m\overline{\eta})\right]\left[J_0(k_m\overline{\eta}_1)+\frac{\cos k_m}{\cosh k_m}I_0(k_m\overline{\eta}_1)\right]}{k_m^2}+ \qquad (24)$$

$$+\frac{0{,}52h^2t}{l^4}\sum_{m=1}^{\infty}J_0(k_n\overline{\eta})J_0(k_n\overline{\eta}_1),$$

где $I_0(k_m\overline{\eta})$, $I_0(k_m\overline{\eta}_1)$ – модифицированные цилиндрические функции.

Так как ядро интегрального уравнения (24) имеет разрывы по диагонали за счет последнего слагаемого, то целесообразно записать решаемое уравнение в эквивалентном виде

$$G(\eta)\left[1+\int_0^l K(\overline{\eta},\overline{\eta}_1)\overline{\eta}_1 d\overline{\eta}_1\right]+\int_0^l\overline{\eta}_1K(\overline{\eta},\overline{\eta}_1)[G(\overline{\eta}_1)-G(\overline{\eta})]d\overline{\eta}_1=f(\overline{\eta}), \qquad (25)$$

где подынтегральная функция во втором интеграле будет правильной, поскольку на диагонали $\overline{\eta}=\overline{\eta}_1$ разность $G(\overline{\eta}_1)-G(\overline{\eta})$ обращается в ноль, а вычисление интеграла $\int_0^l K(\overline{\eta},\overline{\eta}_1)\overline{\eta}_1 d\overline{\eta}_1$ выполняется без искомой функции.

Если модель основания – упругое полупространство, то $C(\xi)$ примет вид

$$C(u)=\frac{Bb}{u}\left[1-\frac{2}{\pi}\int_{u}^{\infty}K_{0}(u)du\right], \tag{26}$$

где $K_{0}(u)$ – функция Макдональда нулевого порядка.

Если модель основания – упругий слой, то

$$C(u)=\frac{Bb}{u}\left[1-\frac{2}{\pi}\int_{u}^{\infty}K_{0}(u)d\,u\right]-\frac{2Bb}{\pi u}\int_{u}^{\infty}\frac{\sin u\tau}{\tau d}\,\frac{du\alpha+e^{-du\alpha}\sinh(du\alpha)}{dua+\sinh(du\alpha)\cosh(du\alpha)}d\tau, \tag{27}$$

где $u=b\xi,\ \tau=\dfrac{\beta}{\xi},\ \alpha=\dfrac{h}{b},\ f=\sqrt{\xi^{2}+\beta^{2}},\ d=\sqrt{1+\tau^{2}}$.

Определив $G(\overline{\eta})$, найдем полный прогиб и прогибы от изгиба и сдвига:

$$\omega^{u}(\alpha)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{m}^{2}\left(\cos k_{m}x_{0}+\dfrac{\cos k_{m}}{\cosh k_{m}}\cosh k_{m}x_{0}\right)}{k_{m}^{4}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\left[1+\frac{\cos k_{m}}{\cosh k_{m}}-k_{m}^{2}\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}G(\overline{\eta}_{1})\overline{\eta}_{1}\left[J_{0}(k_{m}\overline{\eta})+\frac{\cos k_{m}}{\cosh k_{m}}I_{0}(k_{m}\overline{\eta}_{1})\right]d\,\overline{\eta}_{1}\right]\right\}, \tag{28}$$

$$\omega^{C}(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos k_{n}x_{0}}{k_{n}^{2}}\left[\frac{1}{2}-k_{n}^{2}\frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}G(\overline{\eta}_{1})\overline{\eta}_{1}J_{0}(k_{n}\overline{\eta}_{1})d\,\overline{\eta}_{1}\right], \tag{29}$$

а также возникающие в балке внутренние усилия по известным формулам.

Анализ полученных результатов показал, что учет деформации поперечного сдвига зависит от упругих свойств балки, основания и геометрии поперечного сечения. Если модуль упругости основания намного меньше модуля упругости балки, то влиянием деформации поперечного сдвига можно пренебречь, и классическая теория в этом случае полностью применима. Влияние сдвига весьма существенно для коротких, высоких балок. Расчет показал, что для балки, лежащей на упругом полупространстве с показателем гибкости 5, квадратом отношения высоты балки к длине 0,25 величина перемещения в начале координат с учетом деформации сдвига в 1,3 раза больше, чем по классической теории, которая дает также завышенные значения для максимального изгибающего момента. С учетом сдвига величина изгибающего момента в центре балки при указанных выше параметрах уменьшилась на 20 %.

Таким образом, при использовании классической теории может быть получена значительная ошибка при оценке величины напряжений и перемещений.

Читатели, которых интересуют вопросы расчета конструкций на упругом основании, могут обратиться к исследованию [21]. В этой работе приведен обширный обзор источников, в которых рассматриваются основные модели упругого и вязкоупругого оснований в линейной и нелинейной постановках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Соболев Д.И.* Расчет балочных плит на упругом основании при помощи модели с двумя коэффициентами постели // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. № 35. С. 27–31.
2. *Проценко В.С.* Об одной контактной задаче для составной полосы // Докл. Академии наук СССР. 1980. № 6. С. 57–62.
3. *Попов Г.Я.* К теории изгиба плит на линейно-деформируемом основании // Исследования по теории сооружений. 1975. № 20. С. 121–129.
4. *Шацких Л.С.* К расчету плиты на упругом основании // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1978. № 2. С. 170–176.
5. *Симвулиди И.А.* Расчет инженерных конструкций на упругом основании. М.: Высш. шк., 1978. 480 с.
6. *Андреев В.И., Барменкова Е.В., Матвеева А.В.* Обратная задача для неоднородной балки при сложном сопротивлении // Вестн. МГСУ. 2014. № 1. С. 25–32.
7. *Barmenkova E.V., Matveeva A.V.* Calculation of plates of variable rigidity on elastic foundation with variable coefficient of subgrade reaction // Procedia Engineering. 2015. No. 111. P. 97–102.
8. *Сапожников А.И.* Особенности расчета балок на упругом основании // Известия вузов. Строительство. 2011. № 10. С. 99–107.
9. *Потапов В.Д.* Статический расчет плит, лежащих на сплошном нелокально упругом основании // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 1. С. 15–20.
10. *Босаков С.Б.* Плоская контактная задача для полубесконечной пластинки на упругом основании // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 1. С. 2–5.
11. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. М.: Физматлит, 2004. 302 с.
12. *Цейтлин А.И.* О методе парных интегральных уравнений и парных рядов и его приложения к задачам механики // Прикладная математика и механика. 1966. № 30. С. 259–270.
13. *Цейтлин А.И.* Расчет жестких круглых плит на упругом основании методом парных уравнений // Строительная механика и расчет сооружений. 1968. № 1. С. 14–20.
14. *Боган Ю.А.* Уравнения Фредгольма второго рода для первой краевой задачи в двумерной анизотропной теории упругости // Прикладная механика и техническая физика. 2006. № 42. С. 15–21.
15. *Трубчик И.С., Александров В.М.* Метод сведения контактных задач для полубесконечных градиентных областей к решению парных интегральных уравнений // Вестник Нижегородского университета. 2011. № 4. С. 2531–2533.
16. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
17. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2011. 547 с.
18. *Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Поляков В.А.* Учет сдвигов при изгибе ориентированных стеклопластиков // Механика полимеров. 1965. № 2. С. 38–46.
19. *Эссенбург Ф.* Деформация сдвигов в балках на упругом основании // Труды Американского общества инженеров-механиков. 1962. № 2. С. 109–113.
20. *Журавлева Е.Н., Наумов В.С.* Решение гибкой балки на упругом основании методом ортогонализирующих ядер // Научное обозрение. 2017. № 20. С. 27–33.
21. *Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E.* Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications // Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 97. P. 853–895. DOI: 10.1007/s11071-019-04977-9.

Журавлёва Елена Николаевна, канд. техн. наук, доц.
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
Митрошин Василий Александрович, асп.
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Получено после доработки 11.01.2021

Zhuravleva Elena Nikolaevna, PhD, Ass. Professor
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Russia
Mitroshin Vasiliy Aleksandrovich, Post-graduate Student
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Russia

ACCOUNTING FOR SHEAR STRAIN IN BEAMS LYING ON AN ELASTIC BASE

In this work, a solution is constructed for a beam lying on a linearly deformable foundation, considering the shear stiffness. The problem under consideration is reduced to solving paired integral equations, which are reduced to the Fredholm equation of the second kind, and to a system of differential equations that separately consider displacements from shear and bending. This division will greatly simplify the solution of the problem. As an example, we consider the problem of a beam with different flexibility indices, aspect ratios, as well as different values of the elastic layer thickness and in the limit of a half-space under the action of a concentrated force applied at the origin.

K e y w o r d s: beam, shear strain, elastic half-space, elastic layer, integral equation.

REFERENCES

1. *Sobolev D.I.* Raschet balochnykh plit na uprugom osnovanii pri pomoshchi modeli s dvumya koeffitsientami posteli [Calculation of beam slabs on an elastic foundation using a model with two bed factors]. Stroitel’naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural mechanics and calculation of structures]. 1975. No. 35. Pp. 27–31. (in Russian)
2. *Protsenko V.S.* Ob odnoy kontaktnoy zadache dlya sostavnoy polosy [On one contact problem for a composite strip]. Doklady Akademii nauk SSSR [Repost of the Academy of sciences USSR]. 1980. No. 6. Pp. 57–62. (in Russian)
3. *Popov G.Ya.* K teorii izgiba plit na lineyno-deformiruemom osnovanii [Towards the theory of bending of slabs on a linear deforming base]. Issledovaniya po teorii sooruzheniy [Structural research]. 1975. No. 20. Pp. 121–129. (in Russian)
4. *Shatskikh L.S.* K raschetu plity na uprugom osnovanii [To the calculation on an elastic foundation]. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Bulletin of the USSR Academy of sciences. Rigid body mechanics]. 1978. No. 2. Pp. 170–176. (in Russian)
5. *Simvulidi I.A.* Raschet inzhenernykh konstruktsiy na uprugom osnovanii [Calculation of engineering structures on an elastic foundation]. Moscow, 1978. 480 p. (in Russian)
6. *Andreev V.I., Barmenkova E.V., Matveeva A.V.* Obratnaya zadacha dlya neodnorodnoy balki pri slozhnom soprotivlenii [Inverse problem for an inhomogeneous beam with complex resistanc]. Vestnik MGSU [MGSU bulletin]. 2014. No. 1. Pp. 25–32. (in Russian)
7. *Barmenkova E.V., Matveeva A.V.* Calculation of plates of variable rigidity on elastic foundation with variable coefficient of subgrade reaction. Procedia Engineering. 2015. No. 111. Pp. 97–102.
8. *Sapozhnikov A.I.* Osobennosti rascheta balok na uprugom osnovanii [Features of beams on an elastic foundation]. Izvestiya vuzov. Stroitel’stvo [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2011. No. 10. Pp. 99–107. (in Russian)

9. *Potapov V.D.* Staticheskiy raschet plit, lezhashchikh na sploshnom nelokal'no uprugom osnovanii [Static calculation of slabs lying on a solid non-locally elastic foundation]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural mechanics and calculation of structures]. 2015. No. 1. Pp. 15–20. (in Russian)
10. *Bosakov S.B.* Ploskaya kontaktnaya zadacha dlya polubeskonechnoy plastinki na uprugom osnovanii [Plane contact problem for a semi-infinite plate on an elastic foundation]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural mechanics and calculation of structures]. 2015. No. 1. Pp. 2–5. (in Russian)
11. *Aleksandrov V.M., Chebakov M.I.* Analiticheskiye metody v kontaktnykh zadachakh teorii uprugosti [Analyze methods in contact problems of elasticity theory]. Moscow, 2004. 302 p. (in Russian)
12. *Tseytlin A.I.* O metode parnykh integral'nykh uravneniy i parnykh ryadov i ego prilozheniya k zadacham mekhaniki [On the method of paired integral equations and its applications to problems in mechanics]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied mathematics and mechanics]. 1966. No. 30. Pp. 259–270. (in Russian)
13. *Tseytlin A.I.* Raschet zhestkikh kruglykh plit na uprugom osnovanii metodom parnykh uravneniy [Calculation of rigid round plates on an elastic foundation by the method of paired ratios]. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural mechanics and calculation of structures]. 1968. No. 1. Pp. 14–20. (in Russian)
14. *Bogan Yu.A.* Uravneniya Fredgol'ma vtorogo roda dlya pervoy kraevoy zadachi v dvumernoy anizotropnoy teorii uprugosti [Fredholm equations of the second kind for the first boundary value problem in the two-dimensional anisotropic theory of elasticity]. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Applied mechanics and technical physics]. 2006. No. 42. Pp. 15–21. (in Russian)
15. *Trubchik I.S., Aleksandrov V.M.* Metod svedeniya kontaktnykh zadach dlya polubeskonechnykh gradientnykh oblastey k resheniyu parnykh integral'nykh uravneniy [Method of contact problems for semi-infinite gradient functions for solving paired integral equations]. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta [Bulletin of Nizhny Novgorod university]. 2011. No. 4. Pp. 2531–2533. (in Russian)
16. *Uflyand Ya.S.* Integral'nye preobrazovaniya v zadachakh teorii uprugosti [Integral transformations in elasticity problems]. Leningrad, 1967. 402 p. (in Russian)
17. *Kolmogorov A.N.* Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, 2011. 547 p. (in Russian)
18. *Tarnopol'skiy Yu.M., Roze A.V., Polyakov V.A.* Uchet sdvigov pri izgibe orientirovannykh stekloplastikov [Allowance for bending shear of oriented glass-reinforced plastics]. Mekhanika polimerov [Polymer Mechanics]. 1965. No. 2. Pp. 38–46. (in Russian)
19. *Essenburg F.* Deformatsiya sdvigov v balkakh na uprugom osnovanii [Shear deformation in beams on an elastic foundation]. Trudy Amerikanskogo obshchestva inzhenerov-mekhanikov [American Society of Mechanical Engineers]. 1962. No. 2. Pp. 109–113. (in Russian)
20. *Zhuravleva E.N., Naumov V.S.* Reshenie gibkoy balki na uprugom osnovanii metodom ortogonaliziruyushchikh yader [Solving a flexible beam on an elastic one by the method of orthogonalizing kernels]. Nauchnoe obozreniye [Scientific Review]. 2017. No. 20. Pp. 27–33. (in Russian)
21. *Younesian D., Hosseinkhani A., Askari H., Esmailzadeh E.* Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 97. Pp. 853–895. DOI: 10.1007/s11071-019-04977-9.