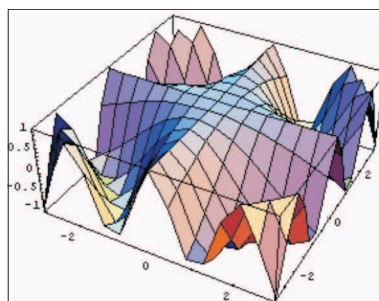


ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ



УДК 539.3

Г.Л. ГОРЫНИН, А.В. ИВАНОВ

ДЕФОРМИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСЬЮ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

С о о б щ е н и е 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ*

Используется метод асимптотического расщепления для математического моделирования напряженного состояния слоистых криволинейных стержней, поперечное сечение которых обладает осью симметрии, в пространственной постановке. Рассмотрены вспомогательные краевые задачи, возникающие в поперечных сечениях слоистых стержней. Получены уравнения деформирования и компоненты тензора напряжений нагруженного распределенной нагрузкой слоистого кольца. Результаты сравниваются с классическими решениями, основанными на использовании гипотез теории сопротивления материалов.

К л ю ч е в ы е с л о в а: криволинейные слоистые стержни, слоистое кольцо, математическое моделирование, метод асимптотического расщепления.

DOI 10.32683/0536-1052-2021-748-4-5-20

Введение. В строительных конструкциях в качестве элементов часто используются криволинейные стержни (арочные конструкции, кольца и т.п.). Существуют разные подходы к моделированию криволинейных стержней. Например, в работе [1] автор рассматривает приближенный аналитический способ исследования пространственных криволинейных стержней на основе замены криволинейного стержня ломаной из прямолинейных стержней. В работе [2] описана тонкая криволинейная балка на основе пространственного криволинейного конечного элемента с использованием гипотезы плоских сечений. В работах [3, 4] расчет перемещений производят численными методами с помощью теории изгиба балок Тимошенко, которые положены в основу гипотезы плоских сечений. В данной статье представлен другой подход к решению задачи изгиба криволинейных стержней без использования вспомогательных гипотез (типа гипотезы плоских сечений и гипотез Тимошенко), основанный на решении пространственной задачи теории упругости. Эта

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-47-860015.

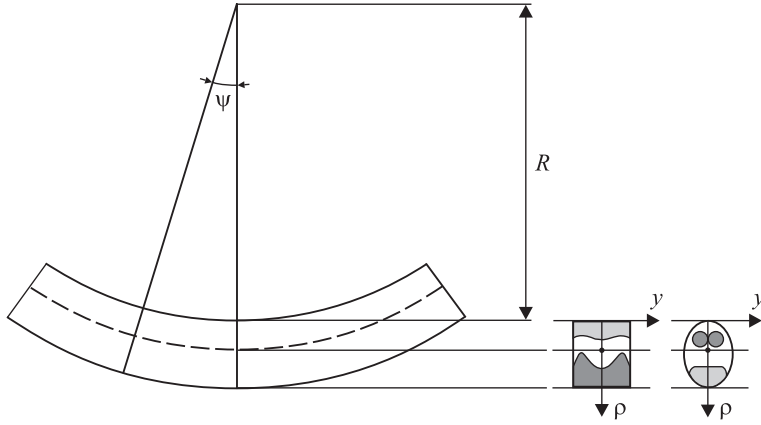


Рис. 1. Криволинейный стержень

задача решается методом асимптотического расщепления, который ранее был разработан для задач деформирования слоистых прямолинейных стержней [5–8].

В цилиндрической системе координат $O r \psi y$ рассмотрим криволинейный слоистый стержень (рис. 1) с постоянным по длине произвольным поперечным сечением, который из центра виден под углом ψ и радиусом R до ближайшего от начала координат слоя, имеющий длину L . Ось y перпендикулярна плоскости стержня. Слои нумеруются начиная с верхнего слоя, i – номер рассматриваемого слоя, всего s слоев из различных материалов. Сечение стержня будем считать симметричным относительно оси, направленной по радиусу.

Пусть $(u_r)_i$, $(u_\psi)_i$ и $(u_y)_i$ – перемещения точек стержня в направлении координатных линий соответственно r , ψ , y ; $(\sigma_{\alpha\beta})_i$ – компоненты тензора напряжений на i -м слое; $[\sigma_{\alpha n}]_i^j$ – скачок контактных напряжений, действующих на границе раздела i -го и j -го слоев в направлении α , $\alpha \in \{r, \psi, y\}$; n_r и n_y – компоненты вектора единичной внешней нормали к поверхности балки либо к границе раздела слоев.

Используем уравнения равновесия в цилиндрической системе координат [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(r(\sigma_{rr})_i) + \frac{\partial}{\partial \psi}(\sigma_{r\psi})_i + \frac{\partial}{\partial y}(r(\sigma_{ry})_i) - (\sigma_{\psi\psi})_i &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r^2(\sigma_{r\psi})_i) + \frac{\partial}{\partial \psi}(r(\sigma_{\psi\psi})_i) + \frac{\partial}{\partial y}(r^2(\sigma_{\psi y})_i) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r}(r(\sigma_{ry})_i) + \frac{\partial}{\partial \psi}(\sigma_{\psi y})_i + \frac{\partial}{\partial y}(r(\sigma_{yy})_i) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$(\sigma_{\alpha r})_i n_r + (\sigma_{\alpha y})_i n_y = q_\alpha, \quad \alpha \in \{r, \psi, y\}, \quad (2)$$

где q_α – нагрузка, действующая на боковую поверхность стержня (наружная поверхность без торцов).

На границе между слоями стержня должны быть непрерывны перемещение и контактные напряжения:

$$\begin{aligned} [\sigma_{\alpha n}]_i^j = 0, \quad (u_\alpha)_i = (u_\alpha)_j, \quad \text{где } [\sigma_{\alpha n}]_i^j = (\sigma_{\alpha n})_j - (\sigma_{\alpha n})_i \\ (\sigma_{\alpha n})_i = (\sigma_{\alpha r})_i n_r + (\sigma_{\alpha y})_i n_y, \quad i, j = [1, s], \quad \alpha \in \{r, \psi, y\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Считаем, что материал стержня подчиняется закону Гука:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\alpha\alpha})_i = \lambda_i \sum_{\gamma \in \{r, \psi, y\}} (e_{\gamma\gamma})_i + 2\mu_i (e_{\alpha\alpha})_i, \\ (\sigma_{\alpha\beta})_i = 2\mu_i (e_{\alpha\beta})_i, \end{aligned} \quad (4)$$

где λ_i, μ_i – постоянные Ламе.

В дальнейшем будем считать, что слои в общем случае обладают различными модулями Юнга и равными коэффициентами Пуассона:

$$\nu_i = \nu, \quad i = [1, s].$$

Данное допущение вводится для получения аналитических решений задачи. В общем случае методом асимптотического расщепления можно рассматривать различные коэффициенты Пуассона на слоях, но при этом решение существенно усложняется, в частности, все вспомогательные задачи в сечении требуют численного решения.

Постоянные Ламе связаны с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношениями [10]:

$$\lambda_i = \frac{E_i \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu)}.$$

Компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} (e_{rr})_i = \frac{\partial (u_r)_i}{\partial r}, \quad (e_{\psi\psi})_i = \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\psi)_i}{\partial \psi} + \frac{(u_r)_i}{r}, \quad (e_{yy})_i = \frac{\partial (u_y)_i}{\partial y}, \\ (e_{r\psi})_i = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (u_r)_i}{\partial \psi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{(u_\psi)_i}{r} \right) \right), \quad (e_{ry})_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (u_r)_i}{\partial y} + \frac{\partial (u_y)_i}{\partial r} \right), \\ (e_{\psi y})_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (u_\psi)_i}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial (u_y)_i}{\partial \psi} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Равенства (1)–(5) представляют собой полукраевую пространственную задачу теории упругости изгиба слоистого криволинейного стержня [4]. Если к ним добавить краевые условия на торцах, то вместе они образуют краевую пространственную задачу.

Введем два параметра

$$\varepsilon_1 = \frac{h}{R}, \quad \varepsilon = \frac{h}{L}, \quad (6)$$

где h – высота поперечного сечения стержня (вдоль радиуса R). Параметр ε_1 характеризует степень искривленности стержня, чем меньше параметр, тем стержень менее искривлен, в предельном случае при $\varepsilon_1 = 0$ радиус равен

бесконечности и стержень из криволинейного превращается в прямолинейный. Параметр ε характеризует свойство тела быть стержнем, чем меньше этот параметр, тем длина стержня больше его поперечного размера, именно при малых значениях ε мы называем тело стержнем.

Эти параметры и максимальный угол ψ_0 связаны очевидным соотношением

$$\psi_0 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Введем новые безразмерные координаты и величины вместо исходных

$$\begin{aligned} \rho &= (r-R)/h, \quad \psi' = \psi/\psi_0, \quad y' = y/h, \quad (\sigma_{\alpha\beta})'_i = (\sigma_{\alpha\beta})_i/\tilde{E}, \quad q'_\alpha = q_\alpha/\tilde{E}, \\ p' &= p/\tilde{E}h, \quad F' = F/h^2, \quad (u_\alpha)'_i = (u_\alpha)_i/h, \quad \lambda'_i = \lambda_i/\tilde{E}, \quad \mu'_i = \mu_i/\tilde{E}, \end{aligned} \quad (8)$$

где \tilde{E} – характерный модуль Юнга одного из материалов слоев стержня, p – погонная нагрузка.

Очевидно, что первое равенство (8) представимо в виде:

$$r = R(1 + \rho\varepsilon_1). \quad (9)$$

Заметим, что в новых координатах общее изменение угла ψ' для всего стержня всегда равняется единице. Переменная ρ изменяется по высоте стержня от 0 до 1. В дальнейшем для удобства апострофы в обозначениях переменных и величин писать не будем.

После элементарных преобразований уравнения равновесия (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho}((1+\rho\varepsilon_1)(\sigma_{rr})_i) + \frac{\partial}{\partial \psi}(\sigma_{r\psi})_i\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}((1+\rho\varepsilon_1)(\sigma_{ry})_i) - (\sigma_{\psi\psi})_i\varepsilon_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho}((1+\rho\varepsilon_1)^2(\sigma_{r\psi})_i) + \frac{\partial}{\partial \psi}((1+\rho\varepsilon_1)(\sigma_{\psi\psi})_i)\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}((1+\rho\varepsilon_1)^2(\sigma_{\psi y})_i) &= 0, \quad (10) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}((1+\rho\varepsilon_1)(\sigma_{ry})_i) + \frac{\partial}{\partial \psi}(\sigma_{\psi y})_i\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}((1+\rho\varepsilon_1)(\sigma_{yy})_i) &= 0, \end{aligned}$$

с краевыми условиями на боковой поверхности

$$(\sigma_{\alpha r})_i n_r + (\sigma_{\alpha y})_i n_y = q_\alpha, \quad \alpha \in \{r, \psi, y\}. \quad (11)$$

Компоненты тензора деформации (5) в новых координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} (e_{rr})_i &= \frac{\partial (u_r)_i}{\partial \rho}, \quad (e_{\psi\psi})_i = \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} \frac{\partial (u_\psi)_i}{\partial \psi} \varepsilon + \frac{(u_r)_i}{1+\rho\varepsilon_1} \varepsilon_1, \quad (e_{yy})_i = \frac{\partial (u_y)_i}{\partial y}, \\ (e_{r\psi})_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} \frac{\partial (u_r)_i}{\partial \psi} \varepsilon + (1+\rho\varepsilon_1) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{(u_\psi)_i}{1+\rho\varepsilon_1} \right) \right), \quad (12) \\ (e_{ry})_i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (u_r)_i}{\partial y} + \frac{\partial (u_y)_i}{\partial \rho} \right), \quad (e_{\psi y})_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (u_\psi)_i}{\partial y} + \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} \frac{\partial (u_y)_i}{\partial \psi} \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Равенства (3)–(4) в новых переменных не изменились.

Будем считать, что нагрузка на боковую поверхность имеет расщепленный вид:

$$q_\alpha(\Gamma, \psi) = f_\alpha(\Gamma) p_\alpha(\psi), \quad \alpha \in \{r, \psi, y\}, \quad (13)$$

где $p_\alpha(\psi)$ – величина обобщенной суммарной нагрузки, действующей на границу сечения, $f_\alpha(\Gamma)$ – функция распределения нагрузки по границе сечения.

Равенства (3)–(4), (10)–(13) образуют полукраевую задачу, решение которой будет построено ниже. В дальнейшем будут рассматриваться только такие криволинейные стержни, для которых два параметра ε и ε_1 существенно меньше единицы.

В соответствии с идеей метода асимптотического расщепления, ищем перемещения и напряжения в виде конечных сумм:

$$(u_\alpha^\eta)_i^n = \sum_{k=0}^N (U_\alpha^\eta)_i^k \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \quad (\sigma_{\alpha\beta}^\eta)_i^n = \sum_{k=0}^N (\tau_{\alpha\beta}^\eta)_i^k \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \quad (14)$$

где n – номер асимптотического приближения, N – зависит от n ;

$(U_\alpha^\eta)_i^k, (\tau_{\alpha\beta}^\eta)_i^k$ – жесткостные функции, зависящие только от переменных ρ, y ;

$\eta^{(n)}$ – функция, зависящая только от ψ , которая, как будет показано в дальнейшем, характеризует перемещения сечения стержня в направлениях ρ, ψ, y . В каждом из этих случаев функция $\eta^{(n)}$ обозначается соответственно $v_r^{(n)}, v_\psi^{(n)}, v_y^{(n)}$.

В формулах (14) слагаемые пропорциональны степеням малого параметра ε^k при разных показателях k . При подстановке формул (14) в уравнения равновесия (10) соберем подобные и приравняем все коэффициенты при ε^k , тогда для каждого значения номера k получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} ((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{rr}^\eta)_i^k) + \frac{\partial}{\partial y} ((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{ry}^\eta)_i^k) - (\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^k \varepsilon_1 + (\tau_{r\psi}^\eta)_i^{k-1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} ((1+\rho\varepsilon_1)^2(\tau_{\psi r}^\eta)_i^k) + \frac{\partial}{\partial y} ((1+\rho\varepsilon_1)^2(\tau_{\psi y}^\eta)_i^k) + (1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^{k-1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} ((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{yr}^\eta)_i^k) + \frac{\partial}{\partial y} ((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{yy}^\eta)_i^k) + (\tau_{y\psi}^\eta)_i^{k-1} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя равенства (13) и (14) в краевые условия (11) для системы уравнений равновесия, после элементарных преобразований получим

$$\sum_{k=0}^N ((\tau_{\alpha r}^\eta)_i^k n_r + (\tau_{\alpha y}^\eta)_i^k n_y) \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k = f_\alpha(\Gamma) p_\alpha(\psi), \quad \alpha \in \{r, \psi, y\}. \quad (16)$$

Уравнения (15) проинтегрируем по сечению и, применив формулу Гаусса–Остроградского, получим:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (1+\rho\varepsilon_1)((\tau_{rr}^\eta)_i^k n_r + (\tau_{ry}^\eta)_i^k n_y) d\Gamma &= \int_F ((\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^k \varepsilon_1 - (\tau_{r\psi}^\eta)_i^{k-1}) dF, \\ \oint_{\Gamma} (1+\rho\varepsilon_1)^2((\tau_{\psi r}^\eta)_i^k n_r + (\tau_{\psi y}^\eta)_i^k n_y) d\Gamma &= - \int_F (1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^{k-1} dF, \\ \oint_{\Gamma} (1+\rho\varepsilon_1)((\tau_{yr}^\eta)_i^k n_r + (\tau_{yy}^\eta)_i^k n_y) d\Gamma &= - \int_F (\tau_{y\psi}^\eta)_i^{k-1} dF, \end{aligned}$$

откуда, используя (16), получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (1 + \rho \varepsilon_1) f_r(\Gamma) p_r(\psi) d\Gamma &= \sum_{k=0}^N B_r^{\eta, k} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \\ \oint_{\Gamma} (1 + \rho \varepsilon_1)^2 f_{\psi}(\Gamma) p_{\psi}(\psi) d\Gamma &= \sum_{k=0}^N B_{\psi}^{\eta, k} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \\ \oint_{\Gamma} (1 + \rho \varepsilon_1) f_y(\Gamma) p_y(\psi) d\Gamma &= \sum_{k=0}^N B_y^{\eta, k} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \end{aligned} \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} B_r^{\eta, k} &= \int_F ((\tau_{\psi\psi}^{\eta})_i^k \varepsilon_1 - (\tau_{r\psi}^{\eta})_i^{k-1}) dF, \\ B_{\psi}^{\eta, k} &= - \int_F (1 + \rho \varepsilon_1) (\tau_{\psi\psi}^{\eta})_i^{k-1} dF, \quad B_y^{\eta, k} = - \int_F (\tau_{y\psi}^{\eta})_i^{k-1} dF. \end{aligned} \quad (18)$$

В интегралах (17) по границе Γ функцию $p_{\alpha}(\psi)$ можно выносить из-под знака интеграла, так как она не зависит от переменных r и y .

Без ограничения общности выберем функции распределения $f_{\alpha}(\Gamma)$, $f_{\psi}(\Gamma)$ так, чтобы выполнялись условия нормировки:

$$\oint_{\Gamma} (1 + \rho \varepsilon_1) f_{\alpha}(\Gamma) d\Gamma = 1, \quad \oint_{\Gamma} (1 + \rho \varepsilon_1)^2 f_{\psi}(\Gamma) d\Gamma = 1, \quad \alpha = \{r, y\}, \quad (19)$$

тогда для нагрузок $p_{\alpha}(\psi)$ из (17) получаем равенство, которое будет использовано в дальнейшем:

$$p_{\alpha}(\psi) = \sum_{k=0}^N B_{\alpha}^{\eta, k} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \quad \alpha = \{r, \psi, y\}. \quad (20)$$

Формулы (20) являются дифференциальными уравнениями на неизвестную функцию $\eta^{(n)}$ при заданных распределенных нагрузках p_{α} .

Теперь, подставляя (20) в (16), получаем краевые условия для уравнений (15)

$$(\tau_{\alpha r}^{\eta})_i^k n_r + (\tau_{\alpha y}^{\eta})_i^k n_y = f_{\alpha}(\Gamma) B_{\alpha}^{\eta, k}. \quad (21)$$

Условия сопряжения (3) для жесткостных функций на границе между слоями принимают вид:

$$\begin{aligned} (\tau_{\alpha r}^{\eta})_i^k n_r + (\tau_{\alpha y}^{\eta})_i^k n_y &= (\tau_{\alpha r}^{\eta})_j^k n_r + (\tau_{\alpha y}^{\eta})_j^k n_y, \quad (U_{\alpha}^{\eta})_i^k = (U_{\alpha}^{\eta})_j^k, \\ i, j &= [1, s], \quad \alpha = \{r, \psi, y\}. \end{aligned} \quad (22)$$

В закон Гука (4) для компоненты $(\sigma_{rr}^{\eta})_i^k$ подставим компоненты тензора деформаций (12) и равенства (14)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N (\tau_{rr}^{\eta})_i^k \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k = \\ & = (2\mu_i + \lambda_i) \sum_{k=0}^N \frac{\partial (U_r^{\eta})_i^k}{\partial \rho} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k + \lambda_i \sum_{k=0}^N \frac{\partial (U_y^{\eta})_i^k}{\partial y} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k + \\ & + \lambda_i \left(\frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} \sum_{k=0}^N (U_r^{\eta})_i^k \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k \varepsilon_1 + \sum_{k=0}^N \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_{\psi}^{\eta})_i^k \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^{k+1} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$(\tau_{rr}^{\eta})_i^k = \lambda_i \left(\frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_r^{\eta})_i^k \varepsilon_1 + \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_{\psi}^{\eta})_i^{k-1} + \frac{\partial (U_y^{\eta})_i^k}{\partial y} \right) + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial (U_r^{\eta})_i^k}{\partial \rho}.$$

Проводя аналогичные выкладки для остальных компонент, получаем равенства:

$$\begin{aligned} (\tau_{\psi\psi}^{\eta})_i^k &= \lambda_i \left(\frac{\partial (U_r^{\eta})_i^k}{\partial \rho} + \frac{\partial (U_y^{\eta})_i^k}{\partial y} \right) + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} ((U_r^{\eta})_i^k \varepsilon_1 + (U_{\psi}^{\eta})_i^{k-1}), \\ (\tau_{yy}^{\eta})_i^k &= \lambda_i \left(\frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} ((U_r^{\eta})_i^k \varepsilon_1 + (U_{\psi}^{\eta})_i^{k-1}) + \frac{\partial (U_r^{\eta})_i^k}{\partial \rho} \right) + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial (U_y^{\eta})_i^k}{\partial y}, \\ (\tau_{r\psi}^{\eta})_i^k &= \mu_i \left((1+\rho\varepsilon_1) \frac{\partial (U_{\psi}^{\eta})_i^k}{\partial \rho} + \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_r^{\eta})_i^{k-1} \right), \\ (\tau_{ry}^{\eta})_i^k &= \mu_i \left(\frac{\partial (U_r^{\eta})_i^k}{\partial y} + \frac{\partial (U_y^{\eta})_i^k}{\partial \rho} \right), \\ (\tau_{\psi y}^{\eta})_i^k &= \mu_i \left(\frac{\partial (U_{\psi}^{\eta})_i^k}{\partial y} + \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_y^{\eta})_i^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Получено семейство рекуррентных краевых задач (15), (18)–(23), решение каждой из которых при фиксированном k основано на решениях этих же краевых задач при меньшем значении k . Данные краевые задачи содержат малый параметр ε_1 , поэтому будем искать решения в виде асимптотического разложения по малому параметру (поиск решения по малому параметру [12]):

$$\begin{aligned} (U_{\alpha}^{\eta})_i^k &= [(U_{\alpha}^{\eta})_i^k]_0 + [(U_{\alpha}^{\eta})_i^k]_1 \varepsilon_1 + [(U_{\alpha}^{\eta})_i^k]_2 \varepsilon_1^2 + \dots, \\ (\tau_{\alpha\beta}^{\eta})_i^k &= [(\tau_{\alpha\beta}^{\eta})_i^k]_0 + [(\tau_{\alpha\beta}^{\eta})_i^k]_1 \varepsilon_1 + [(\tau_{\alpha\beta}^{\eta})_i^k]_2 \varepsilon_1^2 + \dots, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\alpha, \beta = \{r, \psi, y\}.$$

Из первых трех равенств (23) получается формула:

$$(\tau_{\psi\psi}^{\eta})_i^k = \nu((\tau_{rr}^{\eta})_i^k + (\tau_{yy}^{\eta})_i^k) + \frac{E_i}{1+\rho\varepsilon_1} ((U_r^{\eta})_i^k \varepsilon_1 + (U_{\psi}^{\eta})_i^{k-1}). \quad (25)$$

Согласно (18) величины $B_{\alpha}^{\eta,0}$ связаны равенствами

$$B_r^{\eta,0} = \varepsilon_1 \int_F (\tau_{\psi\psi}^{\eta})_i^0 dF, \quad B_{\psi}^{\eta,0} = 0, \quad B_y^{\eta,0} = 0. \quad (26)$$

Краевая задача (15), (18)–(23) при $k=0$ с учетом равенств (26) для $B_\alpha^{\eta,0}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho}((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{rr}^\eta)_i^0) + \frac{\partial}{\partial y}((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{ry}^\eta)_i^0) - (\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^0 \varepsilon_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho}((1+\rho\varepsilon_1)^2(\tau_{\psi r}^\eta)_i^0) + \frac{\partial}{\partial y}((1+\rho\varepsilon_1)^2(\tau_{\psi y}^\eta)_i^0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho}((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{yr}^\eta)_i^0) + \frac{\partial}{\partial y}((1+\rho\varepsilon_1)(\tau_{yy}^\eta)_i^0) &= 0, \end{aligned} \quad (27)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} (\tau_{rr}^\eta)_i^0 n_r + (\tau_{ry}^\eta)_i^0 n_y &= \varepsilon_1 f_r(\Gamma) \int_F (\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^0 dF, \\ (\tau_{ar}^\eta)_i^0 n_r + (\tau_{ay}^\eta)_i^0 n_y &= 0, \quad \alpha = \{\psi, y\}, \end{aligned} \quad (28)$$

и условиями сопряжения слоев:

$$\begin{aligned} (\tau_{ar}^\eta)_i^0 n_r + (\tau_{ay}^\eta)_i^0 n_y &= (\tau_{ar}^\eta)_j^0 n_r + (\tau_{ay}^\eta)_j^0 n_y, \quad (U_\alpha^\eta)_i^0 = (U_\alpha^\eta)_j^0, \\ i, j &= [1, s], \quad \alpha = \{r, \psi, y\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Равенства (23) на жесткостные функции $(\tau_{\alpha\beta}^\eta)_i^0$ при $k=0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} (\tau_{rr}^\eta)_i^0 &= \lambda_i \left(\frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_r^\eta)_i^0 \varepsilon_1 + \frac{\partial}{\partial y} (U_y^\eta)_i^0 \right) + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial}{\partial \rho} (U_r^\eta)_i^0, \\ (\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^0 &= \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (U_r^\eta)_i^0 + \frac{\partial}{\partial y} (U_y^\eta)_i^0 \right) + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_r^\eta)_i^0 \varepsilon_1, \\ (\tau_{yy}^\eta)_i^0 &= \lambda_i \left(\frac{1}{1+\rho\varepsilon_1} (U_r^\eta)_i^0 \varepsilon_1 + \frac{\partial}{\partial \rho} (U_r^\eta)_i^0 \right) + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial}{\partial y} (U_y^\eta)_i^0, \\ (\tau_{r\psi}^\eta)_i^0 &= \mu_i (1+\rho\varepsilon_1) \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{(U_\psi^\eta)_i^0}{1+\rho\varepsilon_1} \right), \\ (\tau_{ry}^\eta)_i^0 &= \mu_i \left(\frac{\partial}{\partial y} (U_r^\eta)_i^0 + \frac{\partial}{\partial \rho} (U_y^\eta)_i^0 \right), \quad (\tau_{\psi y}^\eta)_i^0 = \mu_i \frac{\partial}{\partial y} (U_\psi^\eta)_i^0. \end{aligned} \quad (30)$$

Поставим (24) в (27)–(30), соберем подобные при нулевой степени ε_1 и приравняем полученное к нулю. Система уравнений имеет 3 независимых решения (см. [3]).

Решение первое (в данном случае будем η обозначать v_r):

$$[(U_{rr}^{v_r})_i^0]_0 = 1, [(U_{\psi r}^{v_r})_i^0]_0 = [(U_{yr}^{v_r})_i^0]_0 = 0, [(\tau_{\alpha\beta}^{v_r})_i^0]_0 = 0. \quad (31)$$

Данный выбор решения нулевого возмущения позволяет в дальнейшем придать физический смысл величине η .

Используем полученные решения нулевого приближения, для этого подставляем равенства (31) в (24) и затем результат подставляем в (27)–(30).

Тогда, приравнявая члены, пропорциональные ε_1 , к нулю, получаем уравнения, решения которых имеют вид:

$$\begin{aligned} [(U_r^{v_r})_i^0]_1 &= -v(\rho - a_1), [(U_\psi^{v_r})_i^0]_1 = 0, [(U_y^{v_r})_i^0]_1 = -v(y - a_2), \\ [(\tau_{\psi\psi}^{v_r})_i^0]_1 &= E_i, [(\tau_{\alpha\beta}^{v_r})_i^0]_1 = 0, \{\alpha\beta\} \neq \{\psi\psi\}, a_j - \text{const.} \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя (31) и (32) в (24), получаем асимптотические решения краевой задачи (27)–(30):

$$\begin{aligned} (U_r^{v_r})_i^0 &= 1 - v(\rho - a_1)\varepsilon_1, (U_\psi^{v_r})_i^0 = 0, (U_y^{v_r})_i^0 = -v(y - a_2)\varepsilon_1, \\ (\tau_{\psi\psi}^{v_r})_i^0 &= E_i\varepsilon_1, (\tau_{\alpha\beta}^{v_r})_i^0 = 0, \{\alpha\beta\} \neq \{\psi\psi\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Решение второе (в данном случае будем η обозначать v_ψ) получается аналогично первому:

$$(U_r^{v_\psi})_i^0 = 0, (U_\psi^{v_\psi})_i^0 = 1 + (\rho - b_1)\varepsilon_1, (U_y^{v_\psi})_i^0 = 0, (\tau_{\alpha\beta}^{v_\psi})_i^0 = 0, b_i - \text{const.} \quad (34)$$

Решение третье (в данном случае будем η обозначать v_y) также строится по аналогии с первым:

$$(U_y^{v_y})_i^0 = 1, (U_r^{v_y})_i^0 = (U_\psi^{v_y})_i^0 = 0, (\tau_{\alpha\beta}^{v_y})_i^0 = 0. \quad (35)$$

Заметим, что величины $(U_\alpha^{v_\alpha})_i^k$ входят в формулы для $(\tau_{\alpha\beta}^{v_\alpha})_i^0$ под знаком производной и, как следствие, содержат константы a_i , b_i и c_i . Варьируя данные константы, потребуем

$$\begin{aligned} \frac{1}{F} \int_F (U_\alpha^{v_\alpha})_i^0 dF &= 1, \int_F (U_\beta^{v_\alpha})_i^0 dF = 0, \alpha \neq \beta, \\ \int_F (U_\gamma^{v_\alpha})_i^k dF &= 0, k \geq 1, \alpha, \beta, \gamma \in \{r, \psi, y\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда интегрирование (14) по сечению приведет к

$$\frac{1}{F} \int_F (u_\alpha^{v_\alpha})_i^n dF = v_\alpha^{(n)}, \alpha \in \{r, \psi, y\}.$$

Вариация констант a_i , b_i и c_i позволила придать физический смысл величинам $v_\alpha^{(n)}$ – они являются средними перемещениями сечения стержня.

Каждая из функций v_α , $\alpha \in \{r, \psi, y\}$ должна удовлетворять системе из трех уравнений (20). Следовательно, для каждой из этих функций система (20) является переопределенной. Но система (20) была получена в предположении, что решение ищется в виде (14). Следовательно, в общем случае решение (14) представлено быть не может, поэтому будем искать решение в виде суммы трех представлений (14), причем верхний предел для случая v_ψ будет отличаться [3]:

$$\begin{aligned} (u_\alpha)_i^n &= \sum_{k=0}^N \left((U_\alpha^{v_r})_i^k \frac{d^k v_r^{(n)}}{d\psi^k} + (U_\alpha^{v_y})_i^k \frac{d^k v_y^{(n)}}{d\psi^k} \right) \varepsilon^k + \\ &+ \sum_{k=0}^{N_1} (U_\alpha^{v_\psi})_i^k \frac{d^k v_\psi^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \end{aligned} \quad (37)$$

$$(\sigma_{\alpha\beta})_i^n = \sum_{k=0}^N \left((\tau_{\alpha\beta}^{v_r})_i^k \frac{d^k v_r^{(n)}}{d\psi^k} + (\tau_{\alpha\beta}^{v_y})_i^k \frac{d^k v_y^{(n)}}{d\psi^k} \right) \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{N_1} (\tau_{\alpha\beta}^{v_\psi})_i^k \frac{d^k v_\psi^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k. \quad (38)$$

Если равенства (37) и (38) подставить в исходную полукраевую задачу (3)–(4), (10)–(13) и приравнять подобные при степенях дифференциальных операторов $\frac{d^k v_\alpha^{(n)}}{d\psi^k}$, то в сечении стержня возникают те же краевые задачи,

что и краевые задачи (15), (18)–(23), если в них положить $\eta = v_\alpha$. В частности, формулы (33)–(35) остаются справедливыми и в этом случае. Из формул (38), аналогично (20), получаются уравнения:

$$p_r(\psi) = \sum_{k=0}^N B_r^{v_r, k} \frac{d^k v_r^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k + \sum_{k=0}^{N_1} B_r^{v_\psi, k} \frac{d^k v_\psi^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k + \sum_{k=0}^N B_r^{v_y, k} \frac{d^k v_y^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \quad (39)$$

$$p_\alpha(\psi) = \sum_{k=1}^N B_\alpha^{v_r, k} \frac{d^k v_r^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k + \sum_{k=1}^{N_1} B_\alpha^{v_\psi, k} \frac{d^k v_\psi^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k + \sum_{k=1}^N B_\alpha^{v_y, k} \frac{d^k v_y^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k,$$

$$\alpha \in \{\psi, y\}.$$

Пример. Рассмотрим кольцо (рис. 2) с произвольным симметричным сечением, имеющим s слоев. Плоскость кольца параллельна плоскости $y = 0$. На кольцо действует постоянная сжимающая радиальная погонная нагрузка p_0 .

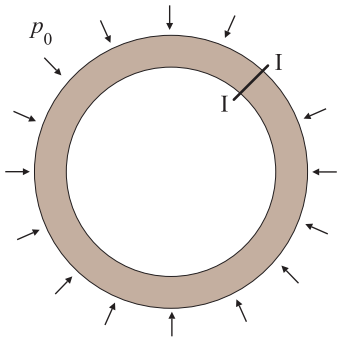
Из (19), учитывая симметрию сечения и равномерное распределение нагрузки, находим $f_r(\Gamma) = \frac{1}{h_y(1+\varepsilon_1)}$. Нагрузки p_α запишутся в виде:

$$p_r = -(1+\varepsilon_1)p_0, \quad p_\psi = p_y = 0.$$

В силу симметрии кольца при постоянной симметричной нагрузке решения ищем в виде:

$$v_r(\psi) = \text{const}, \quad v_\psi(\psi) = v_y(\psi) = 0. \quad (40)$$

Данные равенства подставим в (39), тогда второе и третье равенства обращаются в тождества, а первое принимает вид:



$$B_r^{v_r, 0} v_r = -(1+\varepsilon_1)p_0. \quad (41)$$

Константа $B_r^{v_r, 0}$ находится на основе решения краевой задачи в сечении (27)–(30) при $k = 0$, но эта задача была решена ранее (33)–(35)

$$B_r^{v_r, 0} = \int (\tau_{\psi\psi}^r)_i^0 dF \varepsilon_1 = \sum_1^s E_i F_i \varepsilon_1^2,$$

Рис. 2. Слоистое кольцо под действием равномерной распределенной нагрузки где F_i – площадь i -го слоя,

$$\text{откуда из (41) получаем } v_r = -\frac{(1 + \varepsilon_1) p_0}{\sum_1^s E_i F_i \varepsilon_1^2}, \quad (42)$$

$$\text{или в размерных величинах } v_r = -\frac{(R + h) p_0 R}{\sum_1^s E_i F_i}.$$

Если (40) подставить в (38), то получим равенства:

$$(\sigma_{\alpha\beta})_i = (\tau_{\alpha\beta}^{v_r})_i^0 v_r, \quad \alpha, \beta \in \{r, \psi, y\},$$

учитывая (33) и (42):

$$(\sigma_{\psi\psi})_i = (\tau_{\psi\psi}^{v_r})_i^0 v_r = -E_i \frac{(1 + \varepsilon_1) p_0}{\sum_1^s E_i F_i \varepsilon_1}, \quad (\sigma_{\alpha\beta})_i = 0, \quad \{\alpha\beta\} \neq \{\psi\psi\}, \quad (43)$$

в размерных величинах

$$(\sigma_{\psi\psi})_i = -\frac{E_i (R + h) p_0}{\sum_1^s E_i F_i}. \quad (44)$$

Условия сопряжений между слоями (29) выполняются в силу

$$(\tau_{\alpha\beta}^{v_\gamma})_i^0 = 0, \quad (U_\alpha^{v_\gamma})_i^0 = (U_\alpha^{v_\gamma})_j^0, \quad \alpha, \gamma \in \{r, \psi, y\}, \quad \beta \in \{r, y\}.$$

Если кольцо выполнено из однородного материала, т.е. если в (44) положить $E_i = E$, то формула (43) для $(\sigma_{\psi\psi})_i$ совпадает с классической формулой для расчета кольца под действием сжимающей нагрузки [13].

Из формул (43) следует, что $(\sigma_{rr})_i = 0$, что невозможно, так как на границе действует радиальная нагрузка. Данный результат был получен, когда краевая задача (27)–(30) решалась в виде асимптотического разложения (24), причем разложение бралось, включая первую степень малого параметра ε_1 . Для устранения данного противоречия рассмотрим приближение более высокого порядка, включая квадраты степеней малого параметра ε_1 . В этом случае, с целью упрощения выкладок будем рассматривать не произвольное сечение, а частный случай, когда сечение является прямоугольным с шириной b и высотой каждого i -го слоя h_i .

Подставим разложение (24) в (27)–(30) с учетом результатов (33)–(35) и приравняем члены при квадратах степеней малого параметра ε_1 к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} [(\tau_{rr}^{v_\gamma})_i^0]_2 + \frac{\partial}{\partial y} [(\tau_{ry}^{v_\gamma})_i^0]_2 - [(\tau_{\psi\psi}^{v_\gamma})_i^0]_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} [(\tau_{\psi r}^{v_\gamma})_i^0]_2 + \frac{\partial}{\partial y} [(\tau_{\psi y}^{v_\gamma})_i^0]_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} [(\tau_{yr}^{v_\gamma})_i^0]_2 + \frac{\partial}{\partial y} [(\tau_{yy}^{v_\gamma})_i^0]_2 &= 0, \quad \gamma \in \{r, \psi, y\}, \end{aligned} \quad (45)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} [(\tau_{rr}^{v_\gamma})_i^0]_2 n_r + [(\tau_{ry}^{v_\gamma})_i^0]_2 n_y &= f_r(\Gamma) \int_F [(\tau_{\psi\psi}^{v_\gamma})_i^0]_1 dF, \\ \text{где } [(\tau_{\psi r}^{v_\gamma})_i^0]_1 &= E_i, \quad [(\tau_{\psi\psi}^{\alpha})_i^0]_1 = 0, \\ [(\tau_{\alpha r}^{v_\gamma})_i^0]_2 n_r + [(\tau_{\alpha y}^{v_\gamma})_i^0]_2 n_y &= 0, \quad \alpha = \{\psi, y\}, \end{aligned} \quad (46)$$

и условиями сопряжения слоев:

$$\begin{aligned} [(\tau_{\alpha r}^{v_\gamma})_i^0]_2 n_r + [(\tau_{\alpha y}^{v_\gamma})_i^0]_2 n_y &= [(\tau_{\alpha r}^{v_\gamma})_j^0]_2 n_r + [(\tau_{\alpha y}^{v_\gamma})_j^0]_2 n_y, \\ [(U_\alpha^{v_\gamma})_i^0]_2 &= [(U_\alpha^{v_\gamma})_j^0]_2, \quad i, j = [1, s], \quad \alpha = \{r, \psi, y\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Равенства (23) для жесткостных функций $[(\tau_{\alpha\beta}^{v_\gamma})_i^0]_2$ имеют вид:

$$\begin{aligned} [(\tau_{rr}^{v_\gamma})_i^0]_2 &= \lambda_i \left([(U_r^{v_\gamma})_i^0]_1 - \rho [(U_r^{v_\gamma})_i^0]_0 + \frac{\partial}{\partial y} [(U_y^{v_\gamma})_i^0]_2 \right) + \\ &\quad + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial}{\partial \rho} [(U_r^{v_\gamma})_i^0]_2, \\ [(\tau_{\psi\psi}^\eta)_i^0]_2 &= \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial \rho} [(U_r^{v_\gamma})_i^0]_2 + \frac{\partial}{\partial y} [(U_y^{v_\gamma})_i^0]_2 \right) + \\ &\quad + (2\mu_i + \lambda_i) \left([(U_r^{v_\gamma})_i^0]_1 - \rho [(U_r^{v_\gamma})_i^0]_0 \right), \\ [(\tau_{yy}^{v_\gamma})_i^0]_2 &= \lambda_i \left([(U_r^{v_\gamma})_i^0]_1 - \rho [(U_r^{v_\gamma})_i^0]_0 + \frac{\partial}{\partial \rho} [(U_r^{v_\gamma})_i^0]_2 \right) + (2\mu_i + \lambda_i) \frac{\partial}{\partial y} [(U_y^{v_\gamma})_i^0]_2, \\ [(\tau_{r\psi}^{v_\gamma})_i^0]_2 &= \mu_i \left(\frac{\partial}{\partial \rho} [(U_\psi^{v_\gamma})_i^0]_2 + \rho [(U_\psi^{v_\gamma})_i^0]_0 - [(U_\psi^{v_\gamma})_i^0]_1 \right), \\ [(\tau_{ry}^{v_\gamma})_i^0]_2 &= \mu_i \left(\frac{\partial}{\partial y} [(U_r^{v_\gamma})_i^0]_2 + \frac{\partial}{\partial \rho} [(U_y^{v_\gamma})_i^0]_2 \right), \quad [(\tau_{\psi y}^{v_\gamma})_i^0]_2 = \mu_i \frac{\partial}{\partial y} [(U_\psi^{v_\gamma})_i^0]_2. \end{aligned} \quad (48)$$

В связи со сложностью задач (45)–(48) для их упрощения в дальнейшем ограничимся рассмотрением только случая тонкостенного слоистого прямоугольного сечения. В этом случае краевые условия (46):

$$\text{при } \rho = 1: [(\tau_{rr}^{v_\gamma})_i^0]_2 = \frac{1}{b} \sum_1^s E_i F_i, \quad [(\tau_{rr}^{v_\gamma})_i^0]_2 = 0, \quad [(\tau_{\alpha r}^{v_\gamma})_i^0]_2 = 0, \quad \alpha = \{\psi, y\}, \quad (49)$$

$$\text{при } \rho = 0: [(\tau_{\alpha r}^{v_\gamma})_i^0]_2 = 0, \quad \alpha, \gamma = \{r, \psi, y\},$$

$$\text{при } y = \pm \frac{b}{2}: [(\tau_{\alpha y}^{v_\gamma})_i^0]_2 = 0, \quad \alpha, \gamma = \{r, \psi, y\}, \quad (50)$$

и условиями сопряжения слоев (47) принимают вид:

$$[(\tau_{\alpha r}^{v_\gamma})_i^0]_2 = [(\tau_{\alpha r}^{v_\gamma})_j^0]_2, \quad [(U_\alpha^{v_\gamma})_i^0]_2 = [(U_\alpha^{v_\gamma})_j^0]_2, \quad i, j = [1, s], \quad \alpha = \{r, \psi, y\}. \quad (51)$$

Для поиска решения второго асимптотического приближения по параметру ε_1 , воспользуемся методом усредненных решений, который был разработан для тонкостенных стержней и описан в статье [14]. Для этого введем в рассмотрение операцию усреднения по ширине сечения

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b} \int_{-0,5b}^{0,5b} f(\alpha, s) ds. \quad (52)$$

Напряжения в стержне по ширине сечения в силу его узости меняются слабо, поэтому средние величины напряжений будем считать совпадающими с самими величинами.

Применим операцию усреднения к системе уравнений (45)–(48):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \langle [(\tau_{rr}^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle - \langle [(\tau_{\psi\psi}^{\nu_\gamma})_i^0]_1 \rangle &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \langle [(\tau_{\psi r}^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \langle [(\tau_{yr}^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle &= 0, \quad \gamma \in \{r, \psi, y\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Усредним краевые условия (49) по ширине сечения при $\rho = 1$:

$$\langle [(\tau_{rr}^{\nu_\alpha})_i^0]_2 \rangle = \frac{1}{b} \sum_1^s E_i F_i, \quad \langle [(\tau_{rr}^{\nu_\alpha})_i^0]_2 \rangle = 0, \quad \langle [(\tau_{\alpha r}^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle = 0, \quad \alpha = \{\psi, y\},$$

при $\rho = 0$: $\langle [(\tau_{\alpha r}^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle = 0$, $\alpha, \gamma = \{r, \psi, y\}$,

и усредним условия сопряжения слоев (51):

$$\begin{aligned} \langle [(\tau_{\alpha r}^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle &= \langle [(\tau_{\alpha r}^{\nu_\gamma})_j^0]_2 \rangle, \quad \langle [(U_\alpha^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle = \langle [(U_\alpha^{\nu_\gamma})_j^0]_2 \rangle, \\ i, j &= [1, s], \quad \alpha = \{r, \psi, y\}. \end{aligned}$$

Интегрируем (53) по переменной ρ в пределах от 0 до произвольного ρ :

$$\begin{aligned} \langle [(\tau_{rr}^{\nu_\alpha})_i^0]_2 \rangle &= \sum_{m=1}^{i-1} E_m h_m + E_i \left(\rho - \sum_{m=1}^{i-1} h_m \right), \\ \langle [(\tau_{\alpha\beta}^{\nu_\gamma})_i^0]_2 \rangle &= 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{r, \psi, y\}, \quad \{\alpha\beta\} \neq \{rr\}. \end{aligned} \quad (54)$$

С учетом результатов (54) второго асимптотического приближения формулы (43) принимают вид:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\psi\psi})_i &= -E_i \frac{(1+\varepsilon_1)p_0}{\sum_1^s E_i F_i \varepsilon_1}, \\ (\sigma_{rr})_i &= - \left(\sum_{m=1}^{i-1} E_m h_m + E_i \left(\rho - \sum_{m=1}^{i-1} h_m \right) \right) \frac{(1+\varepsilon_1)p_0}{\sum_1^s E_i F_i}, \\ (\sigma_{\alpha\beta})_i &= 0, \quad \text{при } \{\alpha\beta\} \neq \{\psi\psi\}, \quad \{\alpha\beta\} \neq \{rr\}. \end{aligned}$$

В размерных величинах:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\psi\psi})_i &= - \frac{E_i (R+h) p_0 R}{\sum_1^s E_i F_i}, \\ (\sigma_{rr})_i &= - \left(\sum_{m=1}^{i-1} E_m h_m + E_i \left(r - R - \sum_{m=1}^{i-1} h_m \right) \right) \frac{(R+h) p_0}{\sum_1^s E_i F_i}. \end{aligned} \quad (55)$$

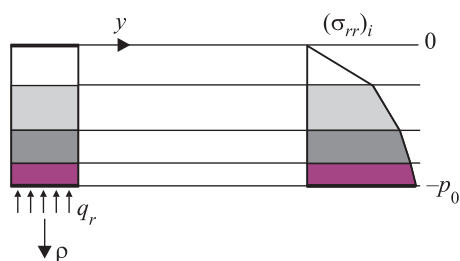


Рис. 3. Эпюра радиальных напряжений сечения узкого слоистого кольца под действием сжимающей нагрузки

В классической теории формула (55) для (σ_{rr}) отсутствует [13, 15]. Заметим, что функция (σ_{rr}) переменной r является кусочно-линейной и монотонно убывающей (рис. 3). На рис. 3 разными цветами выделены слои с разными модулями Юнга E_i .

Закключение. Представленный метод позволяет рассчитывать деформирование криволинейных стержневых конструкций в пространственной постановке задачи теории упругости и соответственно определять все компоненты тензора напряжений, возникающие в конструкции, без введения каких-либо дополнительных гипотез.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Артохин Ю.П. Приближенный аналитический способ исследования деформаций пространственных криволинейных стержней // Ученые записки Казанского университета. 2012. Т. 154. С. 97–111.
2. Зайцев С.Н. Криволинейный балочный конечный элемент, учитывающий геометрические нелинейные деформации // Ученые записки ЦАГИ. 1991. Т. 22, № 5. С. 102–116.
3. Wan Z.-Q., Ma H.-W., Li S.-R. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded Timoshenko Curved beams with variable curvatures // Advances in Materials Science and Engineering. 2019. June.
4. Zare M., Asnafi A. Nonlinear pre and post-buckled analysis of curved beams using differential quadrature element method // International Journal of Mechanical and Materials Engineering. 2019. No. 14.
5. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. GN-теория расчета композитной балки при изгибе. Общая теория. Сообщение 1 // Известия вузов. Строительство. 2012. № 6. С. 3–12.
6. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. GN-теория расчета композитной балки при изгибе. Сообщение 2. Размерная теория и пример // Известия вузов. Строительство. 2012. № 7-8. С. 3–11.
7. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Деформирование слоистых анизотропных стержней в пространственной постановке. 1. Продольно-поперечный изгиб и условие кромочной // Механика композитных материалов. 2009. Т. 45, № 3. С. 379–410.
8. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. Новосибирск: Наука, 2004. 408 с.
9. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 355 с.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
11. Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
12. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М.: Наука, 1984. 535 с.
13. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1965. Т. 1. 364 с.

14. Горынин Г.Л., Горынина О.Г. Исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойного двутавра в пространственной постановке // Вестник СибАДИ. 2012. № 5. С. 49–54.
15. Снитко Н.К. Строительная механика. М.: Высш. шк., 1980. 431 с.

Горынин Глеб Леонидович, д-р физ.-мат. наук, проф.
Сургутский государственный университет
Иванов Александр Владимирович, асп.
Сургутский государственный университет

Получено после доработки 18.03.2021

Gorynin Gleb Leonidovich, DSc, Professor
Surgut State University, Russia
Ivanov Alexander Vladimirovich, Post-graduate Student
Surgut State University, Russia

DEFORMATION OF LAYERED CURVOLINEAR RODS WITH A VERTICAL AXIS OF SYMMETRY IN SPATIAL STATEMENT AT THE.

B a n d 1. GENERAL THEORY

The method of asymptotic splitting is used for mathematical modeling of the stress state of curved rods. Auxiliary boundary value problems arising in the cross sections of curved rods are considered. The equations of curved rods deformation are obtained. The results are compared with classical solutions based on the theory of strength of materials.

Key words: curved bar, curved rods, mathematical modeling, asymptotic splitting method.

REFERENCES

1. *Artyukhin Yu.P.* Priblizhenny analiticheskiy sposob issledovaniya deformatsiy prostanstvennykh krivolineynykh sterzhney [Approximate analytical method for investigating deformations of spatial curved beams]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta [Proceedings of Kazan University]*. 2012. Vol. 154. Pp. 97–111. (in Russian)
2. *Zaytsev S.N.* Krivolineynyy balochnyy konechnyy element, uchityvayushchiy geometricheskie nelineynye deformatsii [Curved beam finite element that takes into account geometric nonlinear deformations]. *Uchenye zapiski TsAGI [TsAGI Science Journal]*. 1991. Vol. 22, No. 5. Pp. 102–116. (in Russian)
3. *Wan Z.-Q., Ma H.-W., Li S.-R.* Geometrically nonlinear analysis of functionally graded Timoshenko Curved beams with variable curvatures. *Advances in Materials Science and Engineering*. 2019, June.
4. *Zare M., Asnafi A.* Nonlinear pre and post-buckled analysis of curved beams using differential quadrature element method. *International Journal of Mechanical and Materials Engineering*. 2019. No. 14.
5. *Gorynin G.L., Nemirovskiy Yu.V.* GN-teoriya rascheta kompozitnoy balki pri izgibe. Obshchaya teoriya. Soobshchenie 1 [GN-theory calculation of the composite beam at the bend]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo [News of Higher Educational Institutions. Construction]*. 2012. No. 6. Pp. 3–12. (in Russian)
6. *Gorynin G.L., Nemirovskiy Yu.V.* GN-teoriya rascheta kompozitnoy balki pri izgibe. Soobshchenie 2. Razmernaya teoriya i primer [GN-theory calculation of the composite beam at the bend 2. The dimensional theory and example]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo [News of Higher Educational Institutions. Construction]*. 2012. No. 7-8. Pp. 3–11. (in Russian)

7. *Gorynin G.L., Nemirovskiy Yu.V.* Deformirovanie sloistykh anizotropnykh sterzhney v prostranstvennoy postanovke. 1. Prodol'no-poperechnyy izgib i uslovie kromochnoy [Deformation of laminated anisotropic beams in the three-dimensional statement 1. Transverse-longitudinal bending and edge compatibility condition]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of composite materials and structures]. 2009. Vol. 45, No. 3. Pp. 379–410. (in Russian)
 8. *Gorynin G.L., Nemirovskiy Yu.V.* Prostranstvennyye zadachi izgiba i krucheniya sloistykh konstruksiy. Metod asimptoticheskogo rasshchepeniya [Spatial problems of bending and torsion of laminated structures. Method of asymptotic splitting]. Novosibirsk, Nauka, 2004. 408 p. (in Russian)
 9. *Lekhnitskiy S.G.* Anizotropnye plastinki [Anisotropic plates]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1947. 355 p. (in Russian)
 10. *Rabotnov Yu.N.* Mekhanika deformiruемого tverdogo tela [Solid mechanics]. Moscow, Nauka, 1988. 712 p. (in Russian)
 11. *Timoshenko S.P.* Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1965. 364 p. (in Russian)
 12. *Nayfe A.Kh.* Metody vozmushcheniy [Perturbation methods]. Moscow, Nauka, 1984. 535 p. (in Russian)
 13. *Timoshenko S.P.* Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. M.: Nauka, 1965. Vol. 1. 364 p. (in Russian)
 14. *Gorynin G.L., Gorynina O.G.* Issledovanie napryazhenno-deformiruемого sostoyaniya trekhsloynnogo dvutavra v prostranstvennoy postanovke [The study of the stress-strain state in a three-layer i-beam in a threedimensional formulation]. *Vestnik SibADI* [The Russian Automobile and Highway Industry Journal]. 2012. No. 5. Pp. 49–54. (in Russian)
 15. *Snitko N.K.* Stroitel'naya mekhanika [Structural mechanics]. Moscow, 1980. 431 p. (in Russian)
-