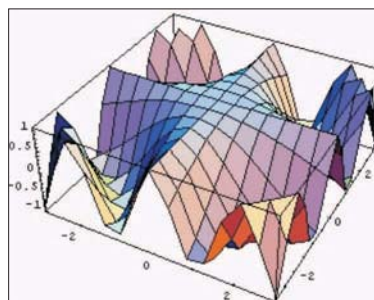


## ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ



УДК 539.3

С.В. БАКУШЕВ

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются вопросы построения дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для центрально-симметричного деформирования сплошных сред при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений с учетом и без учета геометрической нелинейности. Исходя из предположения о независимости друг от друга билинейных диаграмм объемного и сдвигового деформирования, рассмотрены шесть основных случаев физических зависимостей, зависящих от взаимного расположения точек излома диаграмм объемного и сдвигового деформирования. Построение билинейных физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объемного и сдвигового деформирования. При этом на первом участке диаграмм секущий модуль объемного и сдвигового деформирования постояен, в то время как на втором участке диаграмм секущий модуль объемного деформирования является функцией объемной деформации, а секущий модуль сдвига – функцией интенсивности деформаций сдвига. Подставляя билинейные физические уравнения в дифференциальные уравнения равновесия, получены разрешающие дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для центрально-симметричного деформирования сплошной среды, описываемой как с учетом геометрической нелинейности, так и без учета последней. Построенные дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния сплошных сред, находящихся в условиях центрально-симметричного деформирования, как с учетом, так и без учета геометрической нелинейности, физические соотношения для которых описываются билинейными функциями.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения равновесия, центрально-симметричная деформация, билинейные замыкающие уравнения, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность.

DOI 10.32683/0536-1052-2018-719-11-5-19

**Введение.** Реальное напряженно-деформированное состояние твердых деформируемых тел и массивов во многом определяется видом и формой замыкающих уравнений, адекватно описывающих диаграммы объемного и

сдвигового деформирования. Диаграммы объемного и сдвигового деформирования отражают механическое поведение деформируемых тел и строятся по экспериментальным данным. Аналитические зависимости для замыкающих уравнений, учитывая сложный и сугубо нелинейный характер взаимосвязи напряжений и деформаций, порой приводят к чрезвычайно трудоемким разрешающим уравнениям. Введение каких-либо упрощений в замыкающие уравнения либо не разрешает данную проблему, либо приводит к неадекватному описанию напряженно-деформированного состояния.

По нашему мнению, разрешение данного противоречия состоит в следующем: следует как можно точнее описать математически диаграммы объемного и сдвигового деформирования, не принимая во внимание сложность получаемых соотношений, а потом аппроксимировать полученные аналитические выражения какими-либо простыми функциями, например, билинейными. Данный подход имеет глубокие исторические корни. Ведь, по сути, расчет конструкций с использованием идеально-пластической диаграммы Прандтля – это тоже аппроксимация связи между напряжениями и деформациями билинейной функции. Недостаток диаграммы Прандтля, как известно, состоит в том, что на втором прямолинейном участке отсутствует конечная связь между деформациями и напряжениями. Аппроксимация аналитических выражений для замыкающих уравнений либо экспериментальных данных для объемного и сдвигового деформирования билинейными функциями, с одной стороны, значительно упрощает разрешающие уравнения для определения напряженно-деформированного состояния, а с другой – достаточно адекватно описывает кривые объемного и сдвигового деформирования.

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для случая центрально-симметричного деформирования сплошной среды при аппроксимации произвольных физических зависимостей билинейными функциями с учетом и без учета геометрической нелинейности.

Надо сказать, что задачи, связанные с центрально-симметричным деформированием сплошных деформируемых тел, находят себя как в строительстве, так и в машиностроении. Например, рассматривается задача о центрально-симметричном деформировании многослойного упругопластического шара при последовательном присоединении к его внешней поверхности предварительно разогретых слоев [1]. В качестве математической модели используется теория малых упругопластических деформаций, в рамках которой построены графики полей остаточных напряжений и перемещений. В предложенной модели больших упругоползучих деформаций [2] рассмотрено сферически симметричное деформирование полого шара в процессе установившейся ползучести. Кроме того, приведен способ определения нагружающего усилия, вызывающего заданное деформированное состояние.

В работе [3] построена математическая модель, описывающая напряженно-деформированное состояние сферического тела, находящегося под действием всестороннего сжатия. В качестве модели материала взята пористая среда, сжатый скелет которой обладает упрочняющимися упругопластическими свойствами. Приведены также данные экспериментальных исследований

толстостенных полусферических оболочек из нержавеющей стали, находящихся под действием осевого сжатия [4]. Целью работы [5] явилось построение функций перемещений, обеспечивающих условия всестороннего растяжения (сжатия) сплошной среды, описываемой уравнениями геометрически нелинейной теории упругости В.В. Новожилова с учетом физической нелинейности.

Использование билинейных законов деформирования находит достойное место при расчете строительных и машиностроительных конструкций. Так, рассмотрена динамическая задача деформирования упругопластического полупространства с использованием деформационной теории пластичности, причем зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций принимается билинейной [6]. В работе [7] дается обзор и особенности описания диаграмм деформирования бетона при сжатии в отечественных и зарубежных (европейские страны, Индия, Китай, Бразилия, Япония, Украина, Белоруссия) нормативных документах. Отмечено использование как криволинейных, так и параболически линейных и билинейных диаграмм. В статье [8] приводится обзор нормативных документов по физической нелинейности с учетом истории нагружения и предложена методика построения билинейной модели деформирования стального стержня при одноосном знакопеременном нагружении. В работе [9] рассматривается возможность единой математической формулировки задач упругопластической потери устойчивости для двух подходов: Энгессера – Кармана и Шенли. Материал деформируемых элементов характеризуется билинейной диаграммой зависимости между напряжениями и деформациями.

**Построение физических уравнений для геометрически линейной модели.** В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для случая центрально-симметричного деформирования сплошной среды  $u_R = u(R)$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = 0$  при аппроксимации произвольных физических зависимостей билинейными функциями без учета (рис. 1) и с учетом (рис. 2) геометрической нелинейности.

В соответствии с рис. 1 секущие модули объемного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  без учета геометрической нелинейности на первом прямолинейном участке диаграмм  $\sigma \approx \varepsilon$  и  $T \approx \Gamma$  будут определяться выражениями:

$$K = \frac{1}{3} K_0 = \text{const}, \quad (1)$$

$$G = G_0 = \text{const}. \quad (2)$$

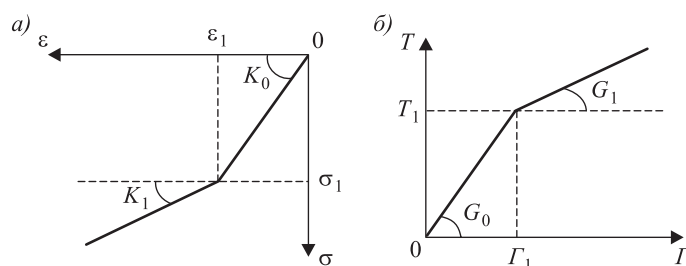


Рис. 1. Диаграммы  $\sigma \approx \varepsilon$  (а) и  $T \approx \Gamma$  (б)

На втором прямолинейном участке диаграмм  $\sigma \approx \varepsilon$  и  $T \approx \Gamma$  секущий модуль объемного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и секущий модуль сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  будут определяться выражениями:

$$K = K(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left[ K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \neq \text{const}, \quad (3)$$

$$G = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq \text{const}. \quad (4)$$

Здесь  $K_0$  – начальный модуль объемного расширения (сжатия);

$G_0$  – начальный модуль сдвига;

$K_1$  – модуль упрочнения при объемном расширении (сжатии);

$G_1$  – модуль упрочнения при сдвиге;

$\sigma$  – первый инвариант тензора напряжений;

$\varepsilon$  – первый инвариант тензора деформаций;

$T$  – интенсивность касательных напряжений;

$\Gamma$  – интенсивность деформаций сдвига.

При центрально-симметричном деформировании геометрически линейной сплошной среды  $\varepsilon = \varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}$  и  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2}$ .

Кроме того,

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u}{\partial R}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{R},$$

причем

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R} = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right);$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial R} = \frac{8}{3\Gamma} (\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \left( \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} - \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial R} \right) = \frac{8}{3\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right] \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right].$$

Учитывая, что построение билинейных диаграмм объемного и сдвигового деформирования выполняется независимо друг от друга, а установить связь между точками излома на диаграммах  $\sigma \approx \varepsilon$  и  $T \approx \Gamma$  в явном виде при центрально-симметричном деформировании не представляется возможным, рассмотрим шесть основных случаев физических зависимостей.

*Случай 1:*  $K_0 \neq K_1, G_0 \neq G_1$ . Точки излома совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| = \Gamma_1$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$  и  $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$ . При этом  $0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$  и  $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1$ . Здесь интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}| = \varepsilon_1$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$ . При этом  $0 \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_1$  и  $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2} = \Gamma_1$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (1) и (2) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right).\end{aligned}\quad (5)$$

*Случай 2:*  $K_0 \neq K_1, G_0 \neq G_1$ . Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $|\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  и  $\Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2} = \Gamma_1$ , а интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}| = \varepsilon_1$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (2) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{1}{3}\left[K_1 + (K_0 - K_1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right]\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3}\left[K_1 + (K_0 - K_1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right]\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right).\end{aligned}\quad (6)$$

*Случай 3:*  $K_0 \neq K_1, G_0 \neq G_1$ . Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $\varepsilon_0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1|$  и  $\Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2} = \Gamma_1$ ,

а интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}| = \varepsilon_1$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (1) и (4) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right).\end{aligned}\quad (7)$$

*Случай 4:*  $K_0 \neq K_1, G_0 \neq G_1$ . Точки излома совпадают, т.е.  $\varepsilon_1 = \Gamma_1$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$ . При этом  $|\varepsilon| \geq \varepsilon_0$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2} = \Gamma_1$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| > \Gamma_1$ . При этом  $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_1|$  и  $\Gamma \geq \Gamma_0$ . Здесь интенсивности  $\Gamma_0$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}| = \varepsilon_1$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (2) и (4) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{1}{3} \left[ K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \varepsilon + 2 \left[ G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left( \varepsilon_{RR} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3} \left[ K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \varepsilon + 2 \left[ G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left( \varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right).\end{aligned}\quad (8)$$

*Случай 5:*  $K_0 = K_1, G_0 \neq G_1$ . Точка излома на диаграмме  $\sigma \approx \varepsilon$  отсутствует. При этом, если  $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (5); если  $\Gamma \geq \Gamma_1$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (7).

*Случай 6:*  $K_0 \neq K_1, G_0 = G_1$ . Точка излома на диаграмме  $T \approx \Gamma$  отсутствует. При этом, если  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (5); если  $\varepsilon \geq \varepsilon_1$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (6).

**Построение дифференциальных уравнений для геометрически линейной модели.** Подставляя физические уравнения (5)–(8) в дифференциальное уравнение равновесия центрально-симметричного деформирования сплошной среды

$$\frac{\partial \sigma_{RR}}{\partial r} + \frac{2}{R} (\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}) + F_R = 0, \quad (9)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + B + F_R = 0. \quad (10)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в уравнении (10) зависят от вида физических уравнений.

1. Для физических уравнений (5):

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{3} K_0 + \frac{4}{3} G_0; \\ B &= \left( \frac{1}{3} K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right).\end{aligned}\quad (11)$$

2. Для физических уравнений (6):

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{3} K_1 + \frac{4}{3} G_0; \\ B &= \left( \frac{1}{3} K_1 + \frac{4}{3} G_0 \right) \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right).\end{aligned}\quad (12)$$

3. Для физических уравнений (7):

$$A = \left( \frac{1}{3} K_0 + \frac{4}{3} G_1 \right) + \frac{4}{3} (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \left[ 1 - \frac{8}{3\Gamma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2 \right];$$

$$\begin{aligned}
 B = & \frac{1}{R} \left( \frac{2}{3} K_0 - \frac{4}{3} G_1 \right) \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) - \frac{4}{3} (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \times \\
 & \times \left[ 1 - \frac{8}{3\Gamma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) + \\
 & + \frac{4}{R} \left[ G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

4. Для физических уравнений (8):

$$\begin{aligned}
 A = & \left( \frac{1}{3} K_1 + \frac{4}{3} G_1 \right) + \frac{4}{3} (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \left[ 1 - \frac{8}{3\Gamma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2 \right]; \\
 B = & \frac{1}{R} \left( \frac{2}{3} K_1 - \frac{4}{3} G_1 \right) \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) - \frac{4}{3} (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \times \\
 & \times \left[ 1 - \frac{8}{3\Gamma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) + \\
 & + \frac{4}{R} \left[ G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right).
 \end{aligned} \tag{14}$$

В формулах (11)–(14)

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для центрально-симметричного деформирования сплошной среды при билинейной аппроксимации физических соотношений без учета геометрической нелинейности построены.

**Построение физических уравнений для геометрически нелинейной модели.** Аппроксимации произвольных замыкающих уравнений билинейными функциями для геометрически нелинейной модели [10, 11] представлены на рис. 2.

Секущие модули объемного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  для геометрически нелинейной модели на первом прямолинейном участке диаграмм  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и  $T^* \approx \Gamma^*$  будут определяться выражениями:

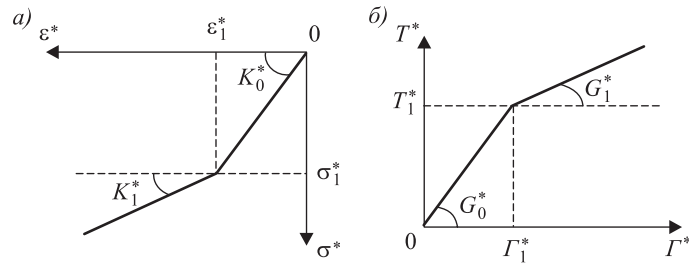


Рис. 2. Диаграммы  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  (а) и  $T^* \approx \Gamma^*$  (б)

$$K^* = \frac{1}{3}K_0^* = \text{const}, \quad (15)$$

$$G^* = G_0^* = \text{const}. \quad (16)$$

На втором прямолинейном участке диаграмм  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и  $T^* \approx \Gamma^*$  секущий модуль объемного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и секущий модуль сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  будут определяться выражениями:

$$K^* = K^*(\varepsilon^*) = \frac{1}{3} \left[ K_1^* + (K_0^* - K_1^*) \frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon^*} \right] \neq \text{const}, \quad (17)$$

$$G^* = G^*(\Gamma^*) = G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \neq \text{const}. \quad (18)$$

Здесь  $K_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля объемного расширения (сжатия);

$G_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига;

$K_1^*$  – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при объемном расширении (сжатии);

$G_1^*$  – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при сдвиге;

$\sigma^*$  – первый инвариант тензора обобщенных напряжений;

$\varepsilon^*$  – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;

$T^*$  – интенсивность обобщенных касательных напряжений;

$\Gamma^*$  – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

При центрально-симметричном деформировании с учетом геометрической нелинейности

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* \quad \text{и} \quad \Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2},$$

причем

$$\varepsilon_{RR}^* = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{R} \right)^2.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial R} &= \frac{\partial \varepsilon_{RR}^*}{\partial R} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{\partial R} = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right); \\ \frac{\partial \Gamma^*}{\partial R} &= \frac{8}{3\Gamma^*} (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \left( \frac{\partial \varepsilon_{RR}^*}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^*}{\partial r} \right) = \frac{8}{3\Gamma^*} \left[ \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right] \times \\ &\quad \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right]. \end{aligned}$$



Рассмотрим шесть основных случаев физических зависимостей.

*Случай 1:*  $K_0^* \neq K_1^*$ ,  $G_0^* \neq G_1^*$ . Точки излома совпадают, то есть  $|\varepsilon_1^*| = \Gamma_1^*$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $0 \leq |\varepsilon^*| \leq |\varepsilon_1^*|$  и  $0 \leq \Gamma^* \leq \Gamma_1^*$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1^*| < \Gamma_1^*$ . При этом  $0 \leq |\varepsilon^*| \leq \varepsilon_1^*$  и  $0 \leq \Gamma^* \leq \Gamma_0^* < \Gamma_1^*$ . Здесь интенсивности  $\Gamma_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^*| = \varepsilon_1^*$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1^*| > \Gamma_1^*$ . При этом  $0 \leq |\varepsilon^*| \leq \varepsilon_0^* < \varepsilon_1^*$  и  $0 \leq \Gamma^* \leq \Gamma_1^*$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2} = \Gamma_1^*$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (15) и (16) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR}^* &= \frac{1}{3}K_0^*\varepsilon^* + 2G_0^*\left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{3}K_0^*\varepsilon^* + 2G_0^*\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right).\end{aligned}\tag{19}$$

*Случай 2:*  $K_0^* \neq K_1^*$ ,  $G_0^* \neq G_1^*$ . Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1^*| < \Gamma_1^*$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $|\varepsilon_1^*| \leq |\varepsilon^*| \leq \varepsilon_0^*$  и  $\Gamma_0^* \leq \Gamma^* \leq \Gamma_1^*$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2} = \Gamma_1^*$ , а интенсивности  $\Gamma_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^*| = \varepsilon_1^*$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (16) и (17) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR}^* &= \frac{1}{3}\left[K_1^* + (K_0^* - K_1^*)\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon^*}\right]\varepsilon^* + 2G_0^*\left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{3}\left[K_1^* + (K_0^* - K_1^*)\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon^*}\right]\varepsilon^* + 2G_0^*\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right).\end{aligned}\tag{20}$$

*Случай 3:*  $K_0^* \neq K_1^*$ ,  $G_0^* \neq G_1^*$ . Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1^*| > \Gamma_1^*$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $\varepsilon_0^* \leq |\varepsilon^*| \leq |\varepsilon_1^*|$  и  $\Gamma_1^* \leq \Gamma^* \leq \Gamma_0^*$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2} = \Gamma_1^*$ , а интенсивности  $\Gamma_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^*| = \varepsilon_1^*$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (15) и (18) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR}^* &= \frac{1}{3}K_0^*\varepsilon^* + 2\left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*)\frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*}\right]\left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{3}K_0^*\varepsilon^* + 2\left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*)\frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*}\right]\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right).\end{aligned}\quad (21)$$

*Случай 4:*  $K_0^* \neq K_1^*$ ,  $G_0^* \neq G_1^*$ . Точки излома совпадают, т.е.  $\varepsilon_1^* = \Gamma_1^*$ . При этом объемная деформация и интенсивность деформаций сдвига изменяются в диапазонах  $|\varepsilon^*| \geq |\varepsilon_1^*|$  и  $\Gamma^* \geq \Gamma_1^*$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1| < \Gamma_1$ . При этом  $|\varepsilon| \geq \varepsilon_0$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1^*$ . Здесь объемной деформации  $\varepsilon_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2} = \Gamma_1^*$ .

Точки излома не совпадают, т.е.  $|\varepsilon_1^*| > \Gamma_1^*$ . При этом  $|\varepsilon^*| \geq |\varepsilon_1^*|$  и  $\Gamma^* \geq \Gamma_0^*$ . Здесь интенсивности  $\Gamma_0^*$  соответствуют такие компоненты деформации, что  $|\varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^*| = \varepsilon_1^*$ .

Физические уравнения центрально-симметричного деформирования с учетом формул (16) и (18) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR}^* &= \frac{1}{3}\left[K_1^* + (K_0^* - K_1^*)\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon^*}\right]\varepsilon^* + \\ &+ 2\left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*)\frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*}\right]\left(\varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* &= \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{3}\left[K_1^* + (K_0^* - K_1^*)\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon^*}\right]\varepsilon^* + \\ &+ 2\left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*)\frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*}\right]\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^*\right).\end{aligned}\quad (22)$$

*Случай 5:*  $K_0^* = K_1^*$ ,  $G_0^* \neq G_1^*$ . Точка излома на диаграмме  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  отсутствует. При этом, если  $0 \leq \Gamma^* \leq \Gamma_1^*$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (19); если  $\Gamma^* \geq \Gamma_1^*$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (21).

*Случай 6:*  $K_0^* \neq K_1^*$ ,  $G_0^* = G_1^*$ . Точка излома на диаграмме  $T^* \approx \Gamma^*$  отсутствует. При этом, если  $0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_1^*$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (19); если  $\varepsilon^* \geq \varepsilon_1^*$ , то физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид (20).

**Построение дифференциальных уравнений для геометрически нелинейной модели.** Подставляя физические уравнения (19)–(22) в дифференциальное уравнение равновесия центрально-симметричного деформирования сплошной среды с учетом геометрической нелинейности

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \sigma_{RR}^* \right] + \frac{2}{R} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \sigma_{RR}^* - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* \right] + F_R^* = 0 \quad (23)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + B + D F_R = 0. \quad (24)$$

$$\text{Здесь } D = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left( 1 + \frac{u}{R} \right)^2.$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в уравнении (24) зависят от вида физических уравнений.

1. Для физических уравнений (19):

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \left[ \varepsilon_{RR}^* + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 \right] + \left( \frac{2}{3} K_0^* - \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^*; \\ B &= \left( \frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \\ &+ \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left[ \left( \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_0^* - \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \right] - \right. \\ &\left. - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left[ \left( \frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_0^* + \frac{2}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \right] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

2. Для физических уравнений (20):

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{1}{3} K_1^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \left[ \varepsilon_{RR}^* + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 \right] + \left( \frac{2}{3} K_1^* - \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \frac{1}{3} (K_0^* - K_1^*) \varepsilon_1^*; \\ B &= \left( \frac{1}{3} K_1^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \\ &+ \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left[ \left( \frac{1}{3} K_1^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_1^* - \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \right] - \right. \\ &\left. - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left[ \left( \frac{1}{3} K_1^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_1^* + \frac{2}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \right] \right\} + \\ &+ \frac{2}{3R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) (K_0^* - K_1^*) \varepsilon_1^*. \end{aligned} \quad (26)$$

3. Для физических уравнений (21):

$$\begin{aligned}
 A &= \left( \frac{1}{3}K_0^* + \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3}K_0^* - \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) + \\
 &+ \left[ \left( \frac{1}{3}K_0^* + \frac{4}{3}G_1^* \right) + \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - \frac{32}{9\Gamma^{*3}}(G_0^* - G_1^*)\Gamma_1^* (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2 \right] \times \\
 &\quad \times \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2; \\
 B &= \left[ \left( \frac{1}{3}K_0^* - \frac{2}{3}G_1^* \right) - \frac{2}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} + \frac{16}{9\Gamma^{*3}}(G_0^* - G_1^*)\Gamma_1^* (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2 \right] \times \\
 &\quad \times \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left( \frac{1}{3}K_0^* + \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{2}{3}K_0^* - \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \varepsilon_{RR}^* - \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \right\} - \quad (27) \\
 &\quad - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left\{ \left( \frac{1}{3}K_0^* - \frac{2}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3}K_0^* + \frac{2}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} (\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{RR}^*) \right\}.
 \end{aligned}$$

4. Для физических уравнений (22):

$$\begin{aligned}
 A &= \left( \frac{1}{3}K_1^* + \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3}K_1^* - \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) + \\
 &+ \left[ \left( \frac{1}{3}K_1^* + \frac{4}{3}G_1^* \right) + \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - \frac{32}{9\Gamma^{*3}}(G_0^* - G_1^*)\Gamma_1^* (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2 \right] \times \\
 &\quad \times \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{3}(K_0^* - K_1^*) \varepsilon_1^*; \\
 B &= \left[ \left( \frac{1}{3}K_1^* - \frac{2}{3}G_1^* \right) - \frac{2}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} + \frac{16}{9\Gamma^{*3}}(G_0^* - G_1^*)\Gamma_1^* (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2 \right] \times \\
 &\quad \times \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left( \frac{1}{3}K_1^* + \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{2}{3}K_1^* - \frac{4}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \varepsilon_{RR}^* - \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \right\} - \quad (28) \\
 &\quad - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left\{ \left( \frac{1}{3}K_1^* - \frac{2}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3}K_1^* + \frac{2}{3}G_1^* \right) \varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \right\} + \frac{2}{3R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) (K_0^* - K_1^*) \varepsilon_1^*.
 \end{aligned}$$

В формулах (25)–(28)

$$\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[ \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{R} \right)^2 \right]^2}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для центрально-симметричного деформирования сплошной среды при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений с учетом геометрической нелинейности построены.

**Заключение.** Построенные дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряженно-деформированного состояния сплошных сред, находящихся в условиях центрально-симметричного деформирования, как с учетом, так и без учета геометрической нелинейности, физические соотношения для которых описываются билинейными функциями.

Дальнейшим развитием данной работы может быть определение рационального положения точек излома на диаграммах объемного и сдвигового деформирования в зависимости от вида аппроксимируемых функций.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мурашкин Е.В., Дац Е.П. Термоупругопластическое деформирование многослойного шара // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 2017. № 5. С. 30–36.
2. Мурашкин Е.В. Расчет параметров нагружения полого шара в условиях больших упругоползучих деформаций // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 1. С. 99–103.
3. Гоцев Д.В., Перунов Н.С. Распределение полей напряжений и перемещений в пористом сферическом теле с учетом упругопластических свойств // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2016. № 2. С. 45–52.
4. Huiwei Yang, Jianxing Hu, Le Xu, Guoyun Lu. Peripheral deformation and buckling of stainless steel hemispherical shells compressed by a flat plate // Latin American Journal of Solids and Structures. Vol. 13(2). P. 257–271.
5. Бакушев С.В. Задача всестороннего растяжения (сжатия) в теории нелинейной упругости // Изв. вузов. Строительство. 2008. № 1. С. 23–28.
6. Резунов А.В. Плоские волны постоянной интенсивности в упругопластическом полупространстве // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: Межвуз. сб. науч. тр. Воронеж, 1993. С. 52–60.
7. Панфилов Д.А., Пищулев А.А., Гимадетдинов К.И. Обзор существующих диаграмм деформирования бетона при сжатии в отечественных и зарубежных нормативных документах // Пром. и гражд. стр-во. 2014. № 3. С. 80–84.
8. Пинус Б.И., Безделев В.В., Гребенюк Г.И., Созонов П.С. Моделирование физической нелинейности стального стержня при одноосном нагружении с учетом истории деформирования // Изв. вузов. Строительство. 2013. № 5. С. 122–128.
9. Туричев Л.С. О разветвленческом критерии упругопластической потери устойчивости стержневых систем // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С: Фундаментальные науки. 2007. № 3. С. 119–124.
10. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
11. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. М.: Кн. дом «Либроком», 2013. 312 с.

**Бакушев Сергей Васильевич**, д-р техн. наук, проф.  
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

Получено после доработки 12.10.18

**Bakushev Sergey Vasilevich**, DSc, Professor  
Penza State University of Architecture and Construction, Russia

## **DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EQUILIBRIUM OF CENTRAL-SYMMETRIC DEFORMATION AT BILINEAR APPROXIMATION TRAILING EQUATIONS**

Under analysis there are questions of construction of differential equations of equilibrium of central-symmetric deformation of continuum at bilinear approximation of closing equation regarding and regardless geometrical nonlinearity. Based on assumption of independence from each other of bilinear diagrams of volume and shear deformation, there being analyzed six main cases of physical mutual interaction, depending on positional relationship of breaking points of volume and shear deformation diagrams. The construction of bilinear physical dependencies is based on calculation of secant modulus of volume and shear deformation. Therefore, at the first part of the diagrams, the secant modulus of volume and shear deformation is constant, while at the second part of the diagrams the secant modulus of volume deformation is a function of volume deformation and the shear secant modulus is an intensity shear deformation function. While putting bilinear physical equations into differential equations of equilibrium, we got resolving differential balance equations at movements for central-symmetric deformation of continuum, described both regarding geometrical nonlinearity and regardless. Constructed in the present article differential equations of equilibrium at the movements can be applied while determining strain-stress state of continuum at the condition of central-symmetric deformation both regarding and regardless geometrical nonlinearity, physical relations for which are described by bilinear functions.

**Key words:** differential equations of equilibrium, the central-symmetric deformation, bilinear trailing equations, geometrical linearity, geometrical nonlinearity.

### REFERENCES

1. Murashkin E.V., Datz E.P. Termouprugoplasticheskoe deformirovanie mnogosloynogo shara [Thermo-elastic-plastic deformation of multi-layer sphere]. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [News of Russian Academy of Science. Mechanics of rigid body]. 2017. No. 5. Pp. 30–36. (in Russian)
2. Murashkin E.V. Raschet parametrov nagruzheniya pologo shara v usloviyakh bol'shikh uprugopolzuchikh deformatsiy [Parameters calculation of cored sphere loading at the condition of big elastic creeping deformation]. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Matematika. Mekhanika. Informatika [News of Saratov university. New series. Mathematics. Mechanics. Information science]. 2014. Vol. 14, No. 1. Pp. 99–103. (in Russian)
3. Gotzev D.V., Perunov N.S. Raspredelenie poley napryazheniy i peremeshcheniy v poristom sfericheskom tele s uchetom uprugoplasticheskikh svoystv [Allocation of stress fields and movements in porous spherical solid with due regard to elastic-plastic characteristics]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [News of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics]. 2016. No. 2. Pp. 45–52. (in Russian)

4. Huiwei Yang, Jianxing Hu, Le Xu, Guoyun Lu. Peripheral deformation and buckling of stainless steel hemispherical shells compressed by a flat plate. *Latin American Journal of Solids and Structures*. No. 13(2). Pp. 257–271.
5. Bakushev S.V. Zadacha vsestoronnego rastyazheniya (szhatiya) v teorii nelineynoy uprugosti [Problem of stretching tension (compression) in the theory of nonlinear elasticity]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2008. No. 1. Pp. 23–28. (in Russian)
6. Reznov A.V. Ploskie volny postoyannoy intensivnosti v uprugoplasticheskom poluprostranstve [Planar waves of constant in elasto-plastic half-space]. *Sovremennye metody staticheskogo i dinamicheskogo rascheta sooruzheniy i konstruktsiy: Mezhevuzovskiy sbornik nauchnykh trudov* [Modern methods of static and dynamic proportioning of structures and constructions. Interuniversity collection of scientific works]. Voronezh, 1993. Pp. 52–60. (in Russian)
7. Panfilov D.A., Pishchulev A.A., Gimadetdinov K.I. Obzor sushchestvuyushchikh diagram deformirovaniya betona pri szhatii v otechestvennykh i zarubezhnykh normativnykh dokumentakh [Review of existing diagrams of concrete deformation at compression in home and foreign regulation documents]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and civil engineering]. 2014. No. 3. Pp. 80–84. (in Russian)
8. Pinus B.I., Bezdelev V.V., Grebenyuk G.I., Sozonov P.S. Modelirovanie fizicheskoy nelineynosti stal'nogo sterzhnya pri odnoosnom nagruzhении s uchedom istorii deformirovaniya [Modeling of physical nonlinearity of steel rod under uniaxial load with deformation history account]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2013. No. 5. Pp. 122–128. (in Russian)
9. Turishev L.S. O razvetvlencheskom kriterii uprugoplasticheskoy poteri ustoychivosti sterzhnevnykh sistem [About splitting criteria of elastic-plastic loss of rigidity of bar system]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya S: Fundamental'nye nauki* [News of Polotzk State University. Series C: Fundamental science]. 2007. No. 3. Pp. 119–124. (in Russian)
10. Novozhilov V.V. *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Leningrad, 1958. 370 p. (in Russian)
11. Bakushev S.V. *Geometricheski i fizicheski nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy: Ploskaya zadacha* [Geometrical and physic non-linear mechanic of continuous mediums: Plane problem]. Moscow, 2013. 312 p. (in Russian)