

УДК 624.121

К.В. КОРОЛЕВ, Я.О. СТАХНЁВ

**СТАТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ  
О ГОРНОМ ДАВЛЕНИИ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК  
ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ**

В статье приведено статическое решение теории предельного равновесия в задаче о горном давлении на крепь подземной горной выработки. Показаны схемы и основные уравнения теории предельного равновесия. Данное решение основывается на сходстве механизма образования призмы обрушения за подпорной стенкой и свода обрушения над кровлей горной выработки как следствие сходства механизма образования активного давления на подпорные стенки и механизма образования горного давления на крепь подземной горной выработки. Численное решение реализовано методом характеристик. В результате была получена сетка линий скольжения, характеризующая поле предельных напряжений в горном массиве вокруг выработки.

**Ключевые слова:** горное давление, свод обрушения, подземная выработка, метод характеристик.

DOI 10.32683/0536-1052-2020-744-12-78-85

**Введение.** Вопрос определения горного давления имеет давнюю историю. Разработка надежных методов расчета подземных сооружений является актуальной задачей, к которой относится проблема оценки горного давления. К настоящему времени разработано большое количество методик расчета величины давления на крепь горной выработки. Здесь следует упомянуть, прежде всего, работы М.М. Протодяконова, Н.С. Булычева, А.Н. Динника, Р. Феннера, Г.Н. Савина, К.В. Руппернейта, А. Гейма и мн. др.

В отечественном тоннелестроении величину горного давления определяют в основном по гипотезе сводообразования М.М. Протодяконова [1–3]. Этот подход основан на оценке прочности горных пород [4]. Вместе с тем в нормативной литературе (СП 22.13330.2016) рекомендуется в задачах устойчивости использовать методы теории предельного равновесия (ТПР). Эти методы сводятся или к поиску наиболее опасной поверхности скольжения, или к построению полей предельных напряжений конечно-разностным решением канонических уравнений ТПР. В последнем случае – это так называемый метод характеристик. Величина горного давления может различаться в зависимости от метода определения [5].

**Основная часть.** В настоящей статье авторы исходят из предположения, что механизм образования свода идентичен механизму образования призмы обрушения грунта за подпорной стенкой. Соответственно механизм возникновения горного давления будет схож с механизмом возникновения активного давления грунта на подпорную стенку.

© Королёв К.В., Стахнёв Я.О., 2020

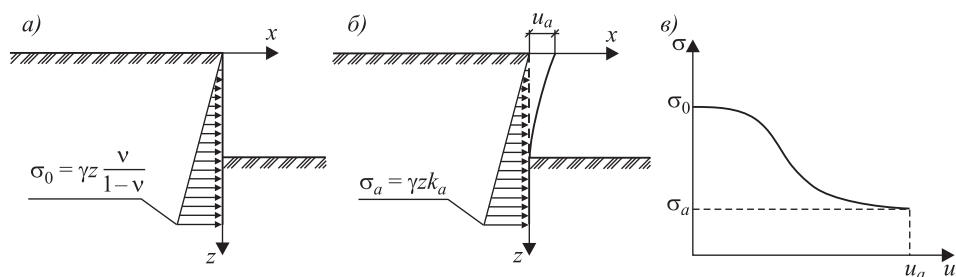


Рис. 1. Схема определения бокового давления на подпорную стенку  
 а – для случая абсолютно жесткой стенки; б – для податливой стенки; в – график зависимости давления от деформаций стенки

Рассмотрим классическую задачу механики грунтов – задачу о давлении грунта на подпорную стенку, в рамках теории предельного равновесия [6]. Для начала определим напряженно-деформируемое состояние системы «подпорная стенка – грунтовый массив» (рис. 1, а).

Предположим, что подпорная стенка является абсолютно жесткой конструкцией. Тогда напряжения по наружной грани стенки будут равны

$$\sigma_0 = \gamma z \frac{\nu}{1-\nu}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  – удельный вес грунта;  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Теперь предположим, что подпорная стенка податлива (см. рис. 1, б), тогда по мере нарастания горизонтальных деформаций  $u$  подпорной стенки активное давление уменьшится до некоторого значения  $\sigma_a$ , которое принято называть активным давлением (см. рис. 1, в), и при сколь угодно малом перемещении стенки от грунта произойдет обрушение грунта.

Теперь рассмотрим напряженно-деформируемое состояние системы «крепь – грунтовый массив» вокруг прямоугольной горной выработки подробнее. Форма ожидаемого свода обрушения зависит от параметров прочности грунта [7]. Предположим, что крепь горной выработки абсолютно жесткая, тогда вертикальное напряжение, очевидно, будет равно весу столба грунта, слагающего грунтовый массив выше шельги свода подземного сооружения (рис. 2, а).

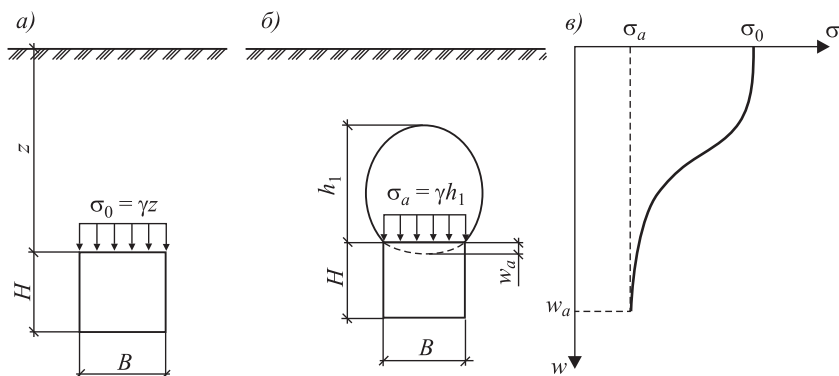


Рис. 2. Схема определения горного давления  
 а – для случая абсолютно жесткой крепи; б – для податливой крепи;  
 в – график зависимости давления от деформаций крепи

Предположим, что крепь горной выработки податлива (см. рис. 2, б), тогда и величина нагрузки уменьшится. Если крепь продолжит деформироваться, то величина давления грунтового массива на нее будет снижаться. Этот процесс может развиваться до тех пор, пока не сформируется свод обрушения. Это давление обычно и принимается в расчетах как горное давление.

В принципе эта же схема работы грунта проявляется и в задаче об активном давлении (см. рис. 2, в).

Следует отметить, что именно такой принцип «*принцип податливой крепи*», позволяющей управлять величиной нагрузки на обделку подземного сооружения, является основой в новоавстрийском методе проходки горных тоннелей (NATM), который успешно реализуют при проходке подземных сооружений как на строительных площадках Российской Федерации, так и в мировой практике тоннеле- и метростроения.

Далее предлагается статическое решение теории предельного равновесия грунтов (ТПРГ) в задаче о горном давлении на основе известного решения ТПРГ задачи об активном давлении.

Исходная система уравнений плоской задачи ТПРГ включает в себя два уравнения равновесия грунтового массива и условие прочности Кулона–Мора (собственный вес направлен вдоль вертикальной оси  $Oz$ ) [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \gamma, \\ \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2} &= (\sigma_x + \sigma_z + 2c \cos \varphi) \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Как известно, через каждую точку предельно напряженного грунта проходят две линии скольжения, образующие с направлением первого главного напряжения угол

$$|\pm\mu| = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \tag{3}$$

На плоскости  $xOz$  эти линии скольжения пересекаются под углом  $2\mu$ . Условимся называть *линиями скольжения 1-го семейства* такие линии, которые составляют с вертикальной осью  $Oz$  угол  $(\alpha + \mu)$ , и *линиями скольжения 2-го семейства* те, которые составляют с вертикалью угол  $(\alpha - \mu)$ , где  $\alpha$  – угол наклона первого главного напряжения  $\sigma_1$  к оси  $Oz$ .

Каноническая система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} dx &= dz \operatorname{tg}(\alpha \pm \mu), \\ d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg}\varphi d\alpha &= \gamma(dz \mp dx \operatorname{tg}\varphi). \end{aligned} \tag{4}$$

Среднее приведенное напряжение  $\sigma$  равно

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + c \operatorname{ctg} \varphi. \tag{5}$$

Угол наклона первого главного напряжения  $\sigma_1$  к оси  $Oz$  определяется уравнением

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x}. \quad (6)$$

Определив в каждой точке предельно напряженного основания параметры  $\sigma$  и  $\alpha$ , компоненты предельных напряжений могут быть установлены как:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_z \end{array} \right\} = \sigma(1 \mp \sin\varphi \cos 2\alpha) - c \operatorname{ctg}\varphi, \quad (7)$$

$$\tau_{xz} = \sigma \sin\varphi \sin 2\alpha.$$

Для определения неизвестных  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $x$ ,  $z$  в системе дифференциальных уравнений (4) прибегают к численным решениям. Эти решения, как правило, заключаются в построении в пределах расчетной области конечно-разностной сетки линий скольжения, в узлах которой будут известны все параметры канонической системы –  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $x$ ,  $z$ . Узлы конечно-разностной сетки представляют собой точки пересечения линий скольжения 1-го и 2-го семейств. При этом сетка линий скольжения получается в процессе решения, а не задается изначально.

Одним из методов для решения исходной системы уравнений (3) является метод характеристик, основывающийся на численном интегрировании канонической системы уравнений (2):

$$\begin{aligned} (x - x_1) &= (z - z_1) \operatorname{tg}(\alpha_1 + \mu), \\ (x - x_2) &= (z - z_2) \operatorname{tg}(\alpha_2 - \mu), \\ \sigma - \sigma_1 + 2\sigma \operatorname{tg} \varphi (\alpha - \alpha_1) &= \gamma [z - z_1 - (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi], \\ \sigma - \sigma_2 - 2\sigma \operatorname{tg} \varphi (\alpha - \alpha_2) &= \gamma [z - z_2 + (x - x_2) \operatorname{tg} \varphi]. \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем к рассмотрению задачи о горном давлении. В статическом решении фигурирует две задачи: 1-я краевая «задача Коши» (рис. 3, а) и 3-я краевая «смешанная задача» (см. рис. 3, б).

Зададимся высотой свода обрушения и обозначим ее через  $h$ , которая будет соответствовать длине отрезка  $AO$ . Граничные условия по границе будут определяться следующим образом. Напряжение  $\sigma_1$  будет действовать горизонтально и вычисляться по формуле

$$\sigma_1 = \gamma z \frac{v}{1-v}. \quad (9)$$

Напряжение  $\sigma_3$  будет действовать вертикально и определяться из закона Кулона

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \operatorname{ctg}\varphi) \sin\varphi. \quad (10)$$

Откуда следует, что

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_1(1 - \sin\varphi) - 2c \cos\varphi}{1 + \sin\varphi}. \quad (11)$$

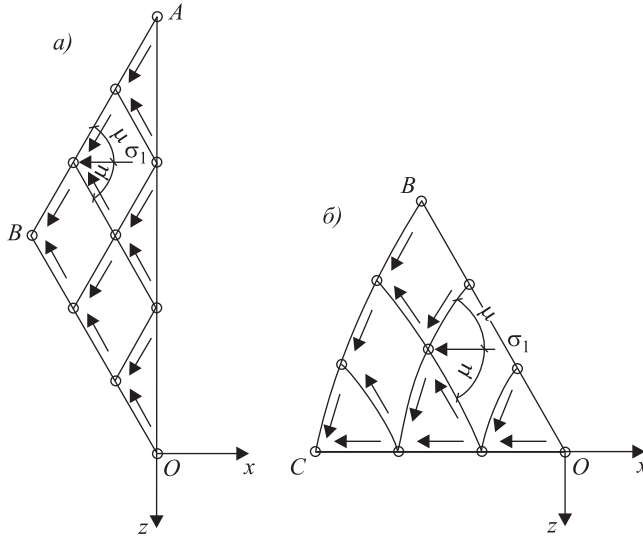


Рис. 3. Последовательность построения численного решения  
 а – 1-я краевая задача (задача Коши); б – 3-я краевая задача (смешанная)

Угол наклона  $\alpha$  среднего приведенного напряжения к оси  $Oz$  равен  $-\pi/2$ .

В данной работе приняты следующие начальные условия:  $\gamma = 17,5 \text{ кН/м}^3$ ,  $c = 9 \text{ кПа}$ ,  $\varphi = 23^\circ$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 1,25 \text{ м}$ .

По результатам численного расчета была построена конечно-разностная сетка (рис. 4), где синим цветом обозначено решение для 1-й краевой задачи, а красным цветом показана сетка линий скольжения для 3-й краевой задачи.

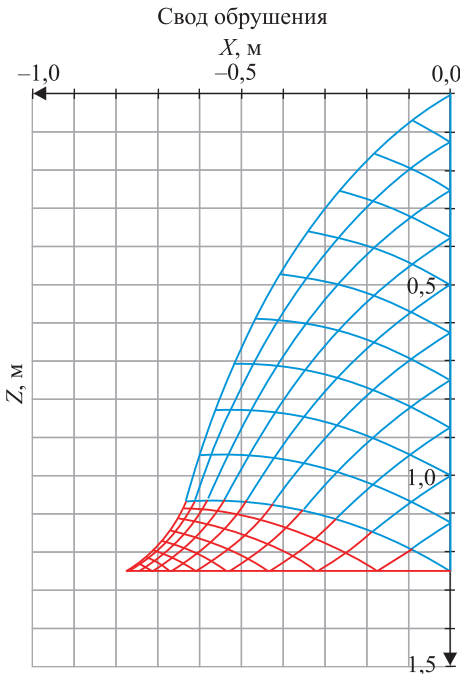


Рис. 4. Сетка линий скольжения

Эпюра горного давления приведена на рис. 5.

Полученное решение означает возможность вычислять величину горного давления, применяя общеупотребимые прочностные характеристики грунта – угол внутреннего трения и удельное

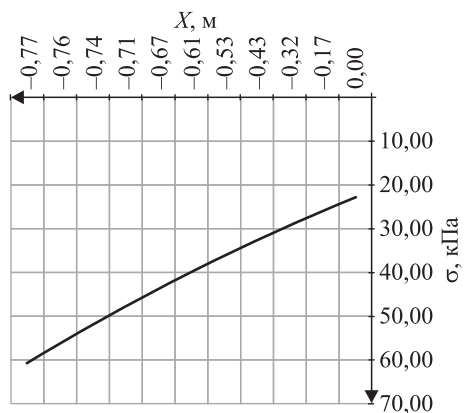


Рис. 5. Эпюра горного давления

сцепление. Для дисперсных грунтов такой способ определения горного давления является наиболее подходящим [9]. Здесь рассматривалась сыпучая среда с трением и сцеплением. Приведенный алгоритм может использоваться и для частных случаев – весомой идеально связной и идеально сыпучей сред. Решения теории предельного равновесия позволяют определять горное давление, основываясь на фундаментальном законе прочности грунта Кулона [10].

**Вывод.** Таким образом, оказалось возможным, используя строгий статический метод ТПРГ (метод характеристик), получить строгое статическое решение задачи о горном давлении для дисперсных грунтов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Протодьяконов М.М.* Давление горных пород на рудничную крепь // Горный журнал. 1909. № 8. С. 80–91.
2. *Либерман Ю.М.* Давление на крепь капитальных выработок: Моногр. М.: Наука, 1969. 119 с.
3. *Борисов А.А.* Расчеты горного давления в лавах пологих пластов: Моногр. М.: Недра, 1964. 279 с.
4. *Танайно А.С.* Сопоставление классификаций горных пород по прочности // Вестн. Кузбас. гос. техн. ун-та. 2003. № 6. С. 13–17.
5. *Панфилова Д.В., Ремезов А.В.* Анализ методик расчета горного давления, возникающего при ведении очистных работ // Вестн. Кузбас. гос. техн. ун-та. 2005. № 4-1. С. 48–52.
6. *Соколовский В.В.* Статика сыпучей среды: Моногр. М.: Наука, 1990. 270 с.
7. *Соколовский В.В.* О формах устойчивости полусводов и сводов // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 1.
8. *Королев К.В.* Плоская задача теории предельного равновесия грунтов: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во СГУПС, 2010. 251 с.
9. *Королев К.В., Стахнёв Я.О., Жукова Е.Н.* К вопросу о горном давлении и сводообразовании // Проектирование, строительство и эксплуатация комплексов подземных сооружений: Труды VI Междунар. конф., 10–11 апр. 2019 г. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2019. С. 209–216.
10. *Coulomb C.A.* Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture // Mem. Acad. Roy. Div. Sav. 1776. Vol. 7. P. 343–387.

**Королев Константин Валерьевич**, д-р техн. наук, проф.;

E-mail: korolev\_kv@mail.ru

Сибирский государственный университет путей сообщения, г. Новосибирск

**Стахнёв Ярослав Олегович**, асп.; E-mail: yaroslav.stakhnyov.95@mail.ru

Сибирский государственный университет путей сообщения, г. Новосибирск

Получено после доработки 26.11.2020

**Korolev Konstantin Valer'evich**, DSc, Professor; E-mail: korolev\_kv@mail.ru

Siberian Transport University, Novosibirsk, Russia

**Stakhnyov Yaroslav Olegovich**, Post-graduate Student;

E-mail: yaroslav.staxnyov.95@mail.ru  
Siberian Transport University, Novosibirsk, Russia

## **STATIC SOLUTION OF THE PROBLEM OF ROCK PRESSURE BY THE METHOD OF CHARACTERISTICS OF THE THEORY OF LIMIT EQUILIBRIUM**

The article presents a static solution of the theory of limit equilibrium in the problem of rock pressure on the support of an underground mine work. Schemes and basic equations of the theory of limit equilibrium are shown. This decision is based on the similarity of the mechanism of formation of the prism of collapse for the retaining wall and the roof collapse over the roof of the mine workings, as a consequence, the similarity of the mechanism of formation of active pressure on the staking-wide wall and formation mechanism of rock pressure on the support underground mining. The numerical solution is implemented by the method of characteristics. As a result, a grid of sliding lines was obtained, which characterizes the field of extreme stresses in the mountain range around the mine.

**Key words:** rock pressure, arch collapse, underground excavation, the method of characteristics.

### REFERENCES

1. *Protod'yakonov M.M.* Davleniye gornykh porod na rudnichnyuyu krep' [Pressure of rocks on miner timber]. Gornyy zhurnal [Mountain magazine]. 1909. No. 8. Pp. 80–91. (in Russian)
2. *Liberman Yu.M.* Davleniye na krep' kapital'nykh vyrabotok: Monografiya [Pressure on timber capital developments: the monography]. Moscow, 1969. 119 p. (in Russian)
3. *Borisov A.A.* Raschety gornogo davleniya v lavakh pologikh plastov: Monografiya [Calculation of mountain pressure in lavas of flat layers: the monography]. Moscow, 1964. 279 p. (in Russian)
4. *Tanayno A.S.* Sopostavleniye klassifikatsiy gornykh porod po prochnosti [Comparison of classifications of rocks on durability]. Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of Kuzbass State Technical University]. 2003. No. 6. Pp. 13–17. (in Russian)
5. *Panfilova D.V., Remezov A.V.* Analiz metodik rascheta gornogo davleniya, voznikayushchego pri vedenii ochistnykh rabot [Analys of design procedures of the mountain pressure arising at conducting of clearing works]. Vestnik Kuzbasskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Bulletin of Kuzbass State Technical University]. 2005. No. 4-1. Pp. 48–52. (in Russian)
6. *Sokolovskiy V.V.* Statika sypuchey sredy: Monografiya [Statics of the loose environment: the monography]. Moscow, 1990. 270 p. (in Russian)
7. *Sokolovskiy V.V.* O formakh ustoychivosti polusvodov i svodov [About forms of stability of semidones and vaults]. Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied mathematics and mechanics]. 1956. Vol. 20, No. 1. (in Russian)
8. *Korolev K.V.* Ploskaya zadacha teorii predel'nogo ravnovesiya gruntov: Uchebnoye posobiye [A problem of the theory of limiting balance soil: the manual]. Novosibirsk, 2010. 251 p. (in Russian)

9. *Korolev K.V., Stahnyov Ya.O., Zhukova E.N.* К вопросу о горном давлении и svodoobrazovanii [To a question on mountain pressure and bridging]. *Proektirovaniye, stroitel'stvo i ekspluatatsiya kompleksov podzemnykh sooruzheniy: Trudy VI Mezhdunarodnoy konferentsii*, 10–11 aprelya 2019 g. [Designing, construction and operation of complexes of underground constructions. Works of VI International conference on April, 10–11, 2019]. Ekaterinburg, 2019. Pp. 209–216. (in Russian)
  10. *Coulomb C.A.* Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. *Mem. Acad. Roy. Div. Sav.* 1976. Vol. 7. Pp. 343–387.
-