
ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

THE THEORY OF STRUCTURES

Известия вузов. Строительство. 2022. № 11. С. 5–14.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2022; (11): 5–14.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 624.042

DOI: 10.32683/0536-1052-2022-767-11-5-14

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ТОНКОЙ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МКЭ В ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ И ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

Александр Владимирович Игнатъев, Иван Сергеевич Завьялов
Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ),
Волгоград, Россия

Аннотация. Представлен расчет тонкой изгибаемой пластинки с различными вариантами граничных условий методом конечных элементов в форме классического смешанного метода и методом конечных элементов в форме перемещений с использованием программных комплексов ПК ЛИРА САПР и SCAD Office. Выполнен анализ результатов расчета пластинок различными формами метода конечных элементов, на основании которого сделан вывод о степени сходимости и эффективности расчетов по двум формам этого метода. Приведены графики сходимости численных значений вычисленных прогибов и изгибающих моментов.

Ключевые слова: МКЭ в форме классического смешанного метода, изгибаемая тонкая пластинка, МКЭ в форме перемещений, прямоугольный КЭ с различными типами граничных условий

Для цитирования: Игнатъев А.В., Завьялов И.С. Сравнительный анализ точности результатов расчета тонкой изгибаемой пластинки с использованием МКЭ в перемещениях и форме классического смешанного метода // Известия вузов. Строительство. 2022. № 11. С. 5–14. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-767-11-5-14.

Original article

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE ACCURACY OF THE CALCULATION RESULTS OF A THIN BENDABLE PLATE USING FEM IN DISPLACEMENTS AND THE FORM OF THE CLASSICAL MIXED METHOD

Alexander V. Ignatyev, Ivan S. Zavyalov
Volograd State Technical University, Volgograd, Russia

Abstract. The calculation of a thin bendable plate with various variations of boundary conditions by the finite element method in the form of a classical mixed method and the finite element method in the form of displacements using the software complexes PK LIRA

© Игнатъев А.В., Завьялов И.С., 2022

SAPR and SCAD Office is presented. The analysis of the results of the calculation of plates by various forms of the finite element method is carried out, on the basis of which a conclusion is made about the degree of convergence and efficiency of calculations for two forms of this method. Graphs of convergence of numerical values of calculated deflections and bending moments are given.

Keywords: FEM in the form of a classical mixed method, a bent thin plate, FEM in the form of displacements, a rectangular FE with different types of boundary conditions

For citation: Ignatyev A.V., Zavyalov I.S. Comparative analysis of the accuracy of the calculation results of a thin bendable plate using FEM in displacements and the form of the classical mixed method. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2022; (11): 5–14. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2022-767-11-5-14.

Введение. В настоящее время важными средствами повышения качества проектирования объектов гражданского и промышленного строительства являются совершенствование методов расчета и верификация вычислительных комплексов и пакетов прикладных программ. Основа разработки рациональных проектных решений – расчет, в результате которого определяется напряженно-деформированное состояние строительной конструкции при различных вариантах и сочетаниях нагрузок, для чего используются как аналитические, так и численные методы. Это приводит к необходимости автоматизации решения с помощью ЭВМ. Метод конечных элементов (МКЭ) является доминирующим численным методом решения инженерных задач, причем в задачах строительной механики чаще всего применяется МКЭ в форме метода перемещений. В первую очередь такое широкое распространение МКЭ в форме перемещений связано с возможностью формализации алгоритмов расчета и создания на его базе различных программных комплексов.

Анализ публикаций по теории МКЭ и практике его применения в программных комплексах выявляет наряду с достоинствами, обеспечившими МКЭ широкое применение, также ряд недостатков [1–3], к которым относятся проблемы пониженной точности вычислений усилий по сравнению с перемещениями, обусловленной приближенным выполнением условий неразрывности деформаций, и одновременного удовлетворения в системе уравнений условий равновесия и совместности деформаций. Это приводит к необходимости верификации результатов расчетов, полученных с помощью программных комплексов, базирующихся на МКЭ в форме перемещений. Поэтому одним из актуальных направлений развития проектирования строительных конструкций остается задача совершенствования методов расчета, в том числе пластин [4–9].

Цель исследования – сравнительный анализ результатов расчета тонкой изгибаемой пластинки на основе двух форм МКЭ – традиционной формы МКЭ в перемещениях и МКЭ в форме классического смешанного метода (КСМ).

В процессе исследования были решены задачи со следующими граничными условиями для пластинок:

- жесткое защемление двух кромок, две другие кромки свободны от связей (см. рис. 2);
- шарнирное опирание по 4 угловым точкам (см. рис. 6).

Подобные пластинки являются расчетными моделями структурных элементов конструктивных систем, различных по области применения.

На основе теории МКЭ в форме КСМ и реализующих его алгоритмов, разработанных авторами [1, 2, 9], при постановке таких типов граничных условий эти задачи решены впервые.

Основная часть. При проведении расчета напряженно-деформированного состояния тонкой изгибаемой пластинки на основе МКЭ в форме классического смешанного метода система представлена ансамблем прямоугольных КЭ с тремя неизвестными в каждом узле. Основная система смешанного метода такого КЭ представлена на рис. 1, где показаны обобщенные узловые неизвестные, за которые приняты вертикальные линейные смещения z и два изгибающих момента M_x и M_y (по направлениям осей Ox и Oy) и их положительные направления.

Функция прогибов конечного элемента $z = w(x, y)$ принята в виде неполного бикубического полинома, удовлетворяющего дифференциальному уравнению изгиба ортотропной пластинки:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3.$$

Получение коэффициентов матрицы откликов конечного элемента выполнено на основе алгоритма, рассмотренного [1, 2, 10]. Формирование системы разрешающих уравнений по МКЭ в форме классического смешанного метода выполняется по тому же алгоритму, что и в методе конечных элементов в перемещениях. Однако эти уравнения имеют разный физический смысл. В смешанном методе разрешающие уравнения состоят из двух групп:

- уравнения равновесия, имеющие физический смысл равенства нулю реакций во введенных в основную систему связей;
- уравнения совместности перемещений (деформаций) конечных элементов, сходящихся в общем для них узле, т.е. равенство нулю разрыва углов поворота в узле нормалей к плоскости пластинки смежных конечных элементов.

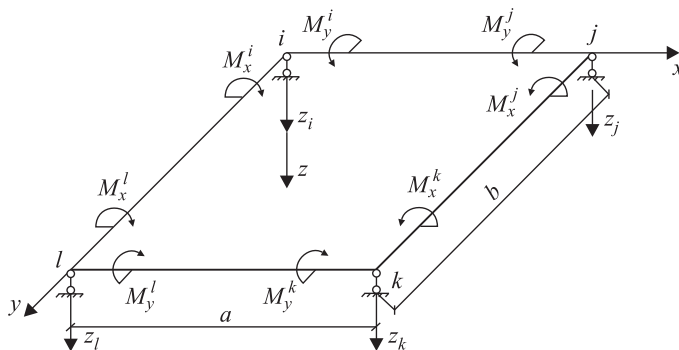


Рис. 1. Основная система смешанного метода для конечного элемента, работающего на изгиб при действии поперечной нагрузки

Fig. 1. The basic system of the mixed method for a finite element working on bending under the action of a transverse load

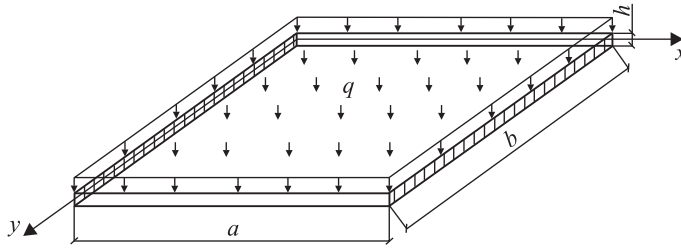


Рис. 2. Пластика, две кромки которой жестко защемлены, а две другие свободны от связей

Fig. 2. A plate, two edges of which are rigidly pinched, and the other two are free from ties

Для проведения вычислений по МКЭ в форме классического смешанного метода алгоритм расчета тонкой изгибаемой пластинки был реализован с помощью пакета прикладных математических программ Scilab.

Постановка задачи. Необходимо выполнить расчет изотропной квадратной тонкой изгибаемой пластинки, представленной конечно-элементной сеткой из прямоугольных конечных элементов с тремя неизвестными (M_x , M_y , w) в каждом узле КЭ, на действие постоянной нагрузки при различных видах граничных условий. Для расчетов по МКЭ в перемещениях использовались программные комплексы ПК ЛИРА САПР и SCAD Office.

Исходные данные: $a = b = 1$ м; $h = 0,01$ м; $\mu_x = \mu_y = 0,3$; $E = 1,092 \cdot 10^7$ т/м²; $q = 1$ т/м².

Задача 1. Пластика, две кромки которой жестко защемлены, а две другие свободны от связей (рис. 2).

В табл. 1, 2 и на рис. 3, 4 приведено сравнение результатов расчета этой пластинки по МКЭ в форме классического смешанного метода и по МКЭ в перемещениях с использованием ПК ЛИРА САПР с аналитическим решением (АР) [11].

Задача 2. Квадратная пластика, шарнирно опертая по 4 угловым точкам (рис. 5).

В табл. 3–5 и на рис. 6, 7 приведено сравнение результатов расчета квадратной пластинки, шарнирно опертой по 4 угловым точкам по МКЭ в форме

Таблица 1. Сравнение результатов расчета квадратной пластинки, две кромки которой жестко защемлены, а две другие кромки свободны от связей, выполненных по МКЭ в форме КСМ с аналитическим решением

Table 1. Comparison of the calculation results of a square plate, two edges of which are rigidly pinched, and the other two edges are free from connections made according to the FEM in the form of a CMM with an analytical solution

Параметры	Сетка КЭ					АР
	4×4	8×8	12×12	16×16	20×20	
$w(a/2; 0)$, м	0,0029660	0,0029152	0,0029092	0,0029082	0,0029080	0,0029088
$w(a/2; b/2)$, м	0,0025102	0,0025469	0,0025542	0,0025568	0,0025581	0,0025598
$M_x(0; b/2)$, т·м	-0,0745332	-0,0799095	-0,0808225	-0,0811426	-0,0813129	-0,0815050

Таблица 2. Сравнение результатов расчета квадратной пластинки, две кромки которой жестко защемлены, а две другие кромки свободны от связей, выполненных в ПК ЛИРА САПР, с аналитическим решением

Table 2. Comparison of the calculation results of a square plate, two edges of which are rigidly pinched, and the other two edges are free from connections made by the PC LIRA SAPR, with an analytical solution

Параметры	Сетка КЭ					АП
	4×4	8×8	12×12	16×16	20×20	
$w(a/2; 0)$, м	0,0026638	0,0028423	0,0028743	0,0028919	0,0028980	0,0029088
$w(a/2; b/2)$, м	0,0026002	0,0025668	0,0025584	0,0025612	0,0025607	0,0025598
$M_x(0; b/2)$, Т·м	-0,0312687	-0,0539956	-0,0625403	-0,0671031	-0,0698813	-0,0815050

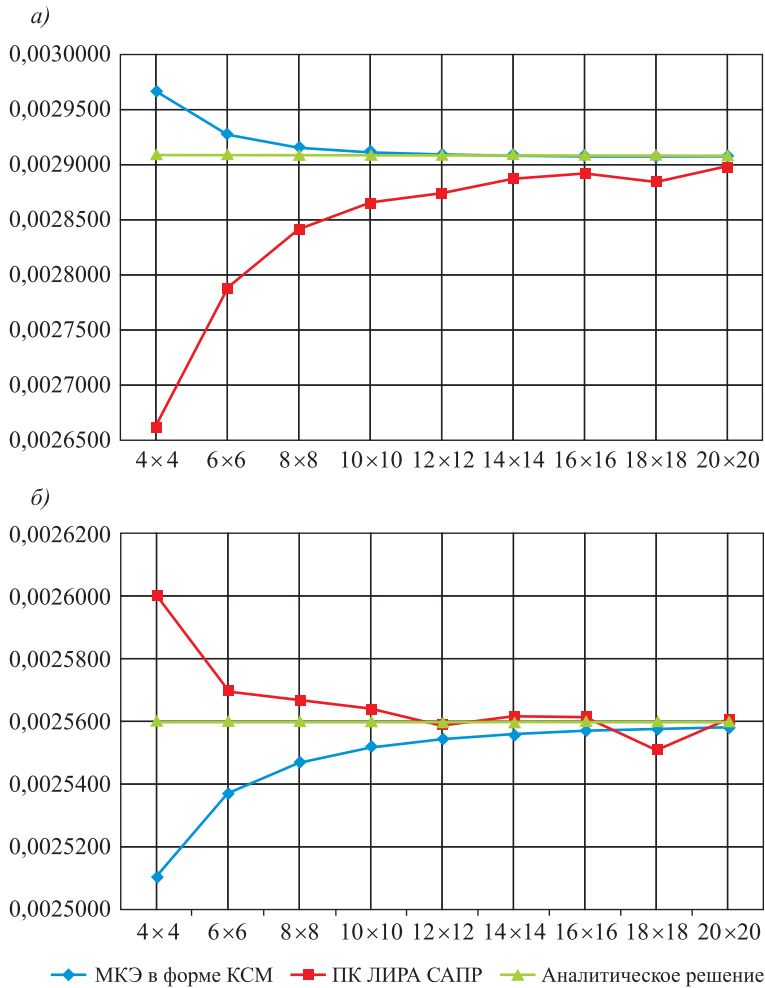


Рис. 3. Прогиб пластинки в середине кромки, свободной от связей (a) и в центре пластинки (b)

Fig. 3. Deflection of the plate in the middle of the edge free from bonds (a) and in the center of the plate (b)

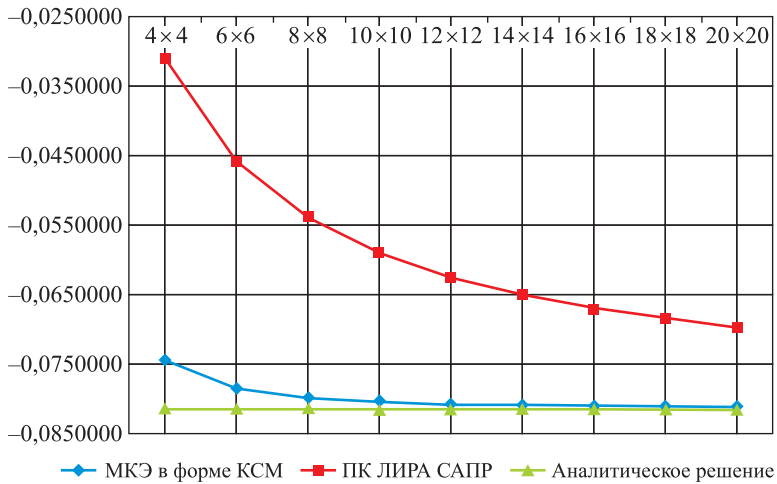


Рис. 4. Момент M_x в точке $(0; b/2)$

Fig. 4. Moment M_x at point $(0; b/2)$

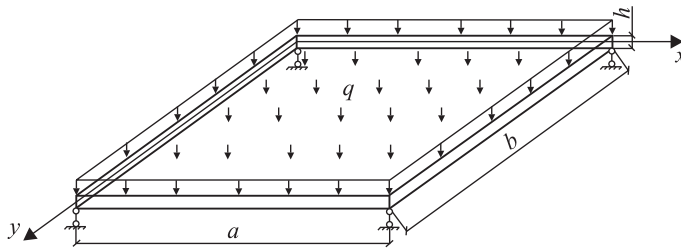


Рис. 5. Пластика, шарнирно опертая по 4 угловым точкам

Fig. 5. Plate pivotally supported by 4 corner points

Таблица 3. Результаты расчета квадратной пластинки, шарнирно опертой по 4 угловым точкам, выполненные по МКЭ в форме КСМ

Table 3. The results of the calculation of a square plate pivotally supported by 4 corner points, made according to the FEM in the form of a CMM

Параметры	Сетка КЭ				
	4x4	8x8	12x12	16x16	20x20
$w(a/2; 0)$, м	0,017157	0,0176154	0,0176914	0,0177167	0,0177281
$w(a/2; b/2)$, м	0,023875	0,0251175	0,0253366	0,0254118	0,0254462
$M_x(a/2; b/2)$, Т·м	0,113451	0,1120641	0,1118636	0,1117962	0,1117654

Таблица 4. Результаты расчета квадратной пластинки, шарнирно опертой по 4 угловым точкам, выполненные в ПК ЛИРА САПР

Table 4. The results of the calculation of a square plate pivotally supported by 4 corner points made in the PC LIRA SAPR

Параметры	Сетка КЭ				
	4x4	8x8	12x12	16x16	20x20
$w(a/2; 0)$, м	0,016767	0,0174878	0,0176021	0,0176811	0,0177049
$w(a/2; b/2)$, м	0,0242933	0,0251775	0,0253168	0,0254219	0,0254521
$M_x(a/2; b/2)$, Т·м	0,105492	0,110166	0,110931	0,111321	0,111461

Таблица 5. Результаты расчета квадратной пластинки, шарнирно опертой по 4 угловым точкам, выполненные в SCAD Office

Table 5. The results of the calculation of a square plate pivotally supported by 4 corner points made in the SCAD Office

Параметры	Сетка КЭ				
	4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
$w(a/2; 0)$, м	0,0170041	0,0175389	0,0176525	0,0176935	0,0177127
$w(a/2; b/2)$, м	0,0249932	0,0253527	0,025435	0,0252983	0,0254799
$M_x(a/2; b/2)$, Т·м	0,10661	0,11037	0,11111	0,11137	0,11149

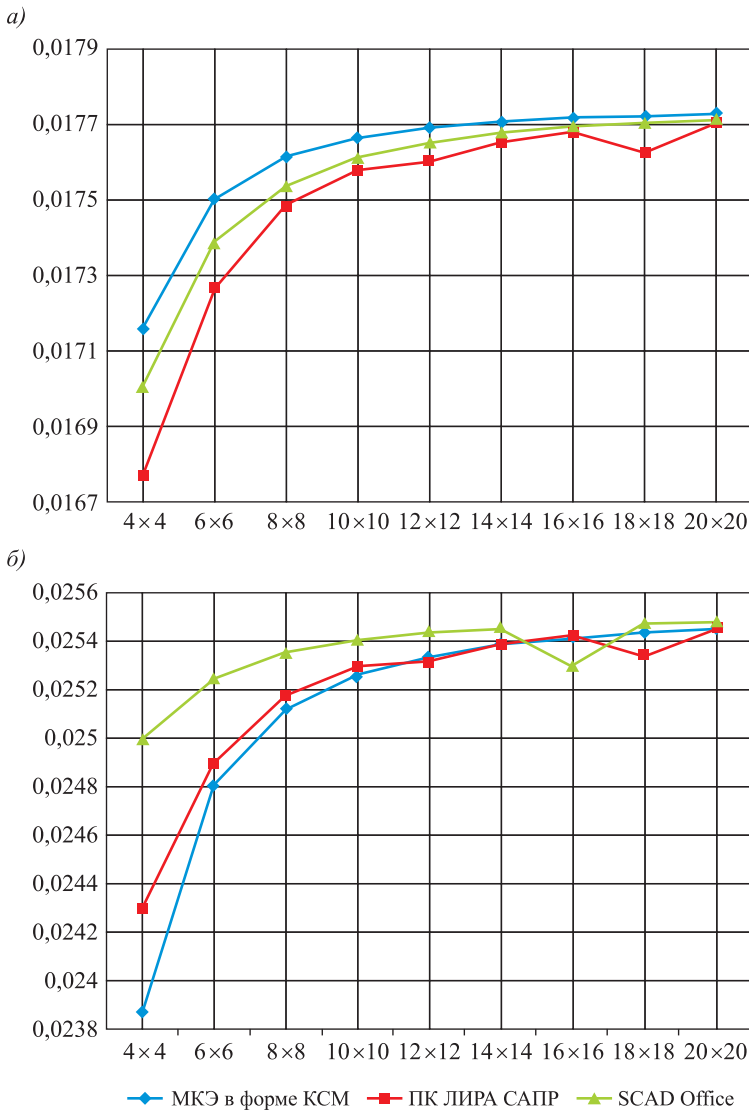


Рис. 6. Прогиб в середине кромки (а) и в центре пластинки (б), шарнирно опертой по 4 угловым точкам

Fig. 6. Deflection in the middle of the edge (a) and in the center of the plate (b), pivotally supported by 4 corner points

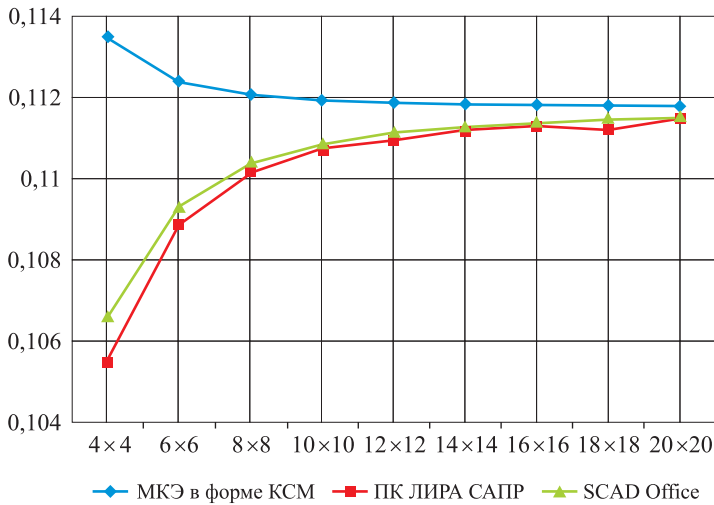


Рис. 7. Моменты M_x , M_y в центре пластинки, шарнирно опертой по 4 угловым точкам

Fig. 7. Moments M_x , M_y in the center of the plate, pivotally supported by 4 corner points

КСМ, и по МКЭ в форме перемещений с использованием ПК ЛИРА САПР и SCAD Office.

Выводы. 1. Для задачи об изгибе квадратной тонкой изгибаемой пластинки в обоих рассмотренных вариантах граничных условий сравнение результатов расчетов, полученных на основе МКЭ в форме КСМ с аналитическим решением, основанным на использовании МКЭ в форме перемещений при помощи программного комплекса ПК ЛИРА САПР, показало высокую степень точности вычисленных перемещений и усилий, не уступающую результатам, получаемым по МКЭ в перемещениях.

2. Для задачи 1 МКЭ в форме классического смешанного метода показывает существенно большую скорость сходимости к точному решению в отношении изгибающих моментов по сравнению с МКЭ в перемещениях. Это подтверждает существование для МКЭ в перемещениях до конца неразрешенной проблемы пониженной точности вычисления усилий по сравнению с перемещениями.

3. С точки зрения эффективности вычислительного процесса МКЭ в перемещениях уступает МКЭ в форме КСМ, так как при равном числе неизвестных в нем необходимо по вычисленным перемещениям найти усилия в узлах конечно-элементной сетки. Следствием этого является увеличение числа вычислительных операций. При этом возникает дополнительная погрешность счета.

Список источников

1. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Изд-во АСВ, 2022. 306 с.
2. Игнатьев А.В. Развитие метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики: Дис. ... д-ра техн. наук. Волгоград, 2019. 283 с.

3. Чувиковский В.С. Численные методы расчетов в строительной механике корабля. Л.: Судостроение, 1976. 376 с.
4. Muller B., Starke G. Stress-Based Finite Element Methods in Linear and Nonlinear Solid Mechanics. May 2016.
5. Auricchio F., Beirão da Veiga L., Lovadina C., Reali A., Taylor R., Wriggers P. Approximation of incompressible large deformation elastic problems: some unresolved issues // *Comput. Mech.* 2013. Vol. 52. P. 1153–1167.
6. Boffi D., Brezzi F., Fortin M. Mixed Finite Element Methods and Applications. Springer, Heidelberg, 2013.
7. Storn J. Topics in Least-Squares and Discontinuous Petrov-Galerkin Finite Element Analysis. 2019.
8. Schneider P., Kienzler R., Boehm M. Modeling of consistent second-order plate theories for anisotropic materials. January 2014.
9. Meyer-Coors M., Kienzler R., Schneider P. Modularity of the displacement coefficients and complete plate theories in the framework of the consistent-approximation approach. April 2021.
10. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В., Завьялов И.С. Алгоритм расчета изгибаемой пластинки на основе МКЭ в форме классического смешанного метода с использованием прямоугольного КЭ с четырьмя основными неизвестными в углах // *Строит. механика и расчет сооружений*. 2021. № 4. С. 12–16.
11. Сухотерин М.В. Изгиб прямоугольной пластины, два противоположных края которой защемлены, а два других свободны // *Вестн. Гос. ун-та морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова*. 2009. № 4(4). С. 193–198.

References

1. Ignatyev V.A., Ignatyev A.V. The finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: Publishing house ACB, 2022. 306 p. (In Russ.).
2. Ignatyev A.V. Development of the finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics: Diss. ... DSc. Volgograd, 2019. 283 p. (In Russ.).
3. Chuvikovskiy V.S. Numerical methods of calculations in ship construction mechanics. Leningrad: Shipbuilding, 1976. 376 p. (In Russ.).
4. Muller B., Starke G. Stress-Based Finite Element Methods in Linear and Nonlinear Solid Mechanics. May 2016.
5. Auricchio F., Beirão da Veiga L., Lovadina C., Reali A., Taylor R., Wriggers P. Approximation of incompressible large deformation elastic problems: some unresolved issues. *Comput. Mech.* 2013; 52: 1153–1167.
6. Boffi D., Brezzi F., Fortin M. Mixed Finite Element Methods and Applications. Springer, Heidelberg, 2013.
7. Storn J. Topics in Least-Squares and Discontinuous Petrov-Galerkin Finite Element Analysis. 2019.
8. Schneider P., Kienzler R., Boehm M. Modeling of consistent second-order plate theories for anisotropic materials. January 2014.
9. Meyer-Coors M., Kienzler R., Schneider P. Modularity of the displacement coefficients and complete plate theories in the framework of the consistent-approximation approach. April 2021.
10. Ignatyev V.A., Ignatyev A.V., Zavyalov I.S. The algorithm for calculating the produced plate based on FEM in the form of a classical mixed method using a rectangular FE

with four basic unknowns in the corners. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* = *Construction mechanics and calculation of structures*. 2021; (4): 12–16. (In Russ.).

11. *Sukhoterin M.V.* Bending of a rectangular plate, two opposite edges of which are pinched, and the other two are free. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova* = *Bulletin of the State University of the Sea and River Fleet named after Admiral S.O. Makarov*. 2009; (4): 193–198. (In Russ.).

Информация об авторах

А.В. Игнатъев – доктор технических наук, доцент, alignat70@yandex.ru

И.С. Завьялов – аспирант, is_zavyalov@mail.ru

Information about the authors

A.V. Ignatyev – DSc, Ass. Professor, alignat70@yandex.ru

I.S. Zavyalov – Post-graduate Student, is_zavyalov@mail.ru

Вклад авторов: авторы внесли эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 30.09.2022
Одобрена после рецензирования 31.10.2022
Принята к публикации 08.11.2022

The article was submitted 30.09.2022
Approved after reviewing 31.10.2022
Accepted for publication 08.11.2022