

Известия вузов. Строительство. 2022. № 4. С. 99–108.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2022; (4): 99–108.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 691.31:678.06.001.24

DOI: 10.32683/0536-1052-2022-760-4-99-108

**РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАСТРЕСКИВАНИЯ ПРИ 3D-ПЕЧАТИ  
ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ПОЛИСТИРОЛБЕТОНОМ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДМОДЕЛИ МОДЕЛИ  
ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ**

**Юрий Александрович Чиркунов<sup>1,2</sup>, Елена Олеговна Пикмуллина<sup>1,2</sup>,  
Владимир Викторович Молодин<sup>1</sup>, Азарий Абрамович Лapidус<sup>3</sup>,  
Дмитрий Владимирович Топчий<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет  
(Сибстрин), Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Научно-исследовательская лаборатория «Математические модели механики  
сплошной среды» Новосибирского государственного архитектурно-строительного  
университета (Сибстрин), Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный архитектурно-строительный университет,  
Москва, Россия

**Аннотация.** Растрескивание слоя полистиролбетона при его укладке с форсированным электроразогревом в ограждающие конструкции зданий по аддитивной технологии является одной из основных проблем широкого внедрения 3D-печати в строительное производство. Ключом к пониманию процессов, вызывающих растрескивание, могут быть точные решения механики сплошных сред. Для трехмерной динамической модели трансверсально-изотропной термоупругой среды, удовлетворяющей условиям Гассмана, методами группового анализа дифференциальных уравнений получены два точных решения, которые описывают принципиально разные режимы динамического деформирования среды под действием найденных перемещений и температуры. Для выяснения их физического смысла приведены графики, характеризующие изменение формы выделенной в трансверсально-изотропной термоупругой среде единичной сферы в результате ее деформации. Характер деформации определяет возможность появления трещин в изделии и указывает необходимый режим нагрева материала печати в головке 3D-принтера, не приводящий к образованию большого числа трещин (расслоению) в напечатанном массиве в процессе его остывания и приобретения прочности.

**Ключевые слова:** 3D-печать ограждающих конструкций зданий, полистиролбетон, трансверсально-изотропная термоупругая среда, динамическое деформирование среды, трещины, 3D-принтер, подмодели

**Благодарности:** исследование выполнено при финансовой поддержке Московского государственного строительного университета в рамках конкурса 2022 г. на выполнение фундаментальных и прикладных исследований (НИОКР) научными коллективами организаций-членов отраслевых консорциумов «Строительство и

архитектура» (контракт № 1/К от 19.05.2022) в целях реализации Программы развития Московского государственного строительного университета на 2021–2030 годы в ходе реализации Программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030».

**Для цитирования:** Чиркунов Ю.А., Пикмуллина Е.О., Молодин В.В., Лapidus А.А., Топчий Д.В. Решение проблемы растрескивания при 3D-печати ограждающих конструкций полистиролбетоном с использованием подмодели модели динамического деформирования трансверсально-изотропной термоупругой среды // Известия вузов. Строительство. 2022. № 4. С. 99–108. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-760-4-99-108.

Original article

## **SUBMODELS OF THE MODEL OF DYNAMIC DEFORMATION OF A TRANSVERSALLY ISOTROPIC THERMOELASTIC MEDIUM FOR SOLVING DELAMINATION PROBLEMS IN 3D PRINTING**

**Yuriy A. Chirkunov<sup>1,2</sup>, Elena O. Pikmullina<sup>1,2</sup>, Vladimir V. Molodin<sup>1</sup>, Azariy A. Lapidus<sup>3</sup>, Dmitriy V. Topchiy<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Research Laboratory "Mathematical Models of Continuum Mechanics" of Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russia

<sup>3</sup>Moscow State University of Architecture and Civil Engineering, Moscow, Russia

**Abstract.** For a three-dimensional dynamic model of a transversally isotropic thermoelastic medium that satisfies the Gassmann conditions, two exact solutions are obtained by group analysis of differential equations, which describe fundamentally different modes of dynamic deformation of the medium under the action of the found displacements and temperature. To clarify their physical meaning, graphs are given that characterize the change in the shape of a single sphere isolated in a transversely isotropic thermoelastic medium as a result of its deformation. The nature of its deformation determines the possibility of cracks in the product and, thereby, indicates the necessary heating mode of the 3D-printer head, which does not lead to the formation of a large number of cracks (delamination) in the printed mass during its cooling and maturation.

**Keywords:** 3D printing of building enclosing structures, polystyrene concrete, transversely isotropic thermoelastic medium, dynamic deformation of the medium, cracks, 3D printer, submodels

**Acknowledgments:** the study was completed with the financial support of the Moscow State University of Civil Engineering in the frame work of the 2022 competition for fundamental and applied research (R&D) scientific collectives of member organizations of Industry consortia “Construction and Architecture” (Contract No. 1/K dated 05/19/2022) in order to implementation of the Development Program of the Moscow State University of Civil Engineering for 2021–2030 during the implementation of the Strategic Academic Leadership Program “Priority 2030”.

**For citation:** Chirkunov Yu.A., Pikmullina E.O., Molodin V.V., Lapidus A.A., Topchiy D.V. Submodels of the model of dynamic deformation of a transversally isotropic thermoelastic medium for solving delamination problems in 3d printing. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2022; (4): 99–108. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2022-760-4-99-108.

**Введение.** Наиболее острой проблемой при 3D-печати ограждающих конструкций зданий и сооружений форсированно разогретым полистиролбетоном является образование трещин (расслоений) в массиве материала при его выходе из печатающей головки 3D-принтера [1–9]. Гранулы полистирола при достижении полистиролбетонной смесью температур 80–90 °С резко вспучиваются. Цементно-песчаная составляющая материала при этих температурах теряет подвижность и способность к регенерации. На поверхности напечатанного слоя появляются трещины, снижающие его прочность и сплошность. Изучение физических процессов термоупругого деформирования материала, происходящих при этом, становится центральным вопросом развития технологии 3D-печати.

Математические модели многих явлений реального мира и, конечно же, модели механики сплошных сред формулируются в виде дифференциальных уравнений. Групповой анализ этих моделей – один из наиболее эффективных способов получения количественных и качественных характеристик описываемых ими физических процессов. Симметричный (групповой) анализ дифференциальных уравнений основан на теории групп Ли и алгебр Ли. Он хорошо показал себя в нахождении классов точных решений дифференциальных уравнений. Фундаментальное начало положил норвежский математик Софус Ли (1842–1899). В России метод развивался как теория размерностей. Теория групп Ли долгое время оставалась в стороне от возможных приложений к дифференциальным уравнениям математической физики. Однако с середины XX в. исследования академика Л.В. Овсянникова [10], его учеников и последователей [11, 12] (и приведенные там списки литературы) показали, что методы теории групп Ли – эффективный способ изучения структуры решения систем дифференциальных уравнений. В настоящее время это математическое направление называется групповым или симметричным анализом дифференциальных уравнений.

Трехмерная динамическая модель трансверсально-изотропной термоупругой среды [13–15] используется для описания термоупругого деформирования материалов с анизотропией упругих свойств с преимущественным направлением анизотропии. К таким материалам относятся слоистые и композиционные материалы, применяемые в строительстве, машиностроении, авиа- и судостроении, а также горные массивы и ледники. Для этой модели компоненты тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  определяются соотношениями:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u^1}{\partial x'}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u^2}{\partial y'}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u^3}{\partial z'}, \quad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u^1}{\partial y'} + \frac{\partial u^2}{\partial x'},$$

$$2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u^1}{\partial z'} + \frac{\partial u^3}{\partial x'}, \quad 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u^2}{\partial z'} + \frac{\partial u^3}{\partial y'},$$
(1)

где  $u^1 = u^1(x', y', z', t')$ ,  $u^2 = u^2(x', y', z', t')$ ,  $u^3 = u^3(x', y', z', t')$  – компоненты вектора перемещений. Здесь  $x' = (x', y', z')$  – координаты точки в пространстве,  $t'$  – время.

Закон Гука для трансверсально-изотропной термоупругой среды имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{11} + \lambda \varepsilon_{22} + \lambda' \varepsilon_{33} - \beta \theta', \\ \sigma_{22} &= \lambda \varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{22} + \lambda' \varepsilon_{33} - \beta \theta', \\ \sigma_{33} &= \lambda' (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda' + 2\mu') \varepsilon_{33} - \beta' \theta', \\ \sigma_{23} &= 2G' \varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2G' \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;

$\lambda, \mu, \lambda', \mu', G'$  – коэффициенты трансверсально-изотропной среды;

$\beta, \beta'$  – коэффициенты теплового расширения;

$\theta' = \theta'(x', y', z', t')$  – температура.

Система уравнений динамического деформирования трансверсально-изотропной термоупругой среды, в силу (1), (2), записывается в виде [12–14]:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu) u_{x'x'}^1 + \mu u_{y'y'}^1 + G' u_{z'z'}^1 + (\lambda + \mu) u_{x'y'}^2 + (\lambda' + G') u_{x'z'}^3 - \beta \theta_{x'}' &= \rho u_{t't'}^1, \\ (\lambda + \mu) u_{x'y'}^1 + \mu u_{x'x'}^2 + (\lambda + 2\mu) u_{y'y'}^2 + G' u_{z'z'}^2 + (\lambda' + G') u_{y'z'}^3 - \beta \theta_{y'}' &= \rho u_{t't'}^2, \\ (\lambda' + G') u_{x'z'}^1 + (\lambda' + G') u_{y'z'}^2 + G' u_{x'x'}^3 + G' u_{y'y'}^3 + (\lambda' + 2\mu') u_{z'z'}^3 - \beta' \theta_{z'}' &= \rho u_{t't'}^3.\end{aligned}\tag{3}$$

Система замыкается уравнением теплопроводности

$$c_0 \theta_{t'}' + \theta_0' (\beta u_{x'x'}^1 + \beta u_{y'y'}^2 + \beta' u_{z'z'}^3) = k \theta_{x'x'}' + k \theta_{y'y'}' + k' \theta_{z'z'}',\tag{4}$$

где  $k, k'$  – коэффициенты теплопроводности;

$c_0$  – коэффициент теплоемкости;

$\rho$  – плотность.

Рассмотрим термодинамический процесс, для которого:

$$\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G, \quad \mu' = G', \quad \beta = \beta' = 1, \quad k = k', \quad \theta_0 = c_0.$$

При таких модулях упругости заведомо выполняется условие Гассмана [15, 16], которое широко используется в геофизике при изучении распространения волн в трансверсально-изотропных упругих средах. В этом случае в результате замены переменных

$$t = \frac{c_0}{k\rho} t', \quad x = \frac{c_0}{k\sqrt{\rho}} x', \quad x = (x, y, z), \quad \theta = \frac{k\sqrt{\rho}}{c_0} \theta'$$

система (3), (4) принимает вид:

$$\begin{aligned}u_{tt}^1 &= (\lambda + 2\mu) u_{xx}^1 + \mu u_{yy}^1 + G' u_{zz}^1 + (\lambda + \mu) u_{xy}^2 + (\lambda' + G') u_{xz}^3 - \theta_{x'}, \\ u_{tt}^2 &= (\lambda + \mu) u_{xy}^1 + \mu u_{xx}^2 + (\lambda + 2\mu) u_{yy}^2 + G' u_{xy}^2 + (\lambda' + G') u_{yz}^3 - \theta_{y'}, \\ u_{tt}^3 &= (\lambda' + G') u_{xz}^1 + (\lambda' + G') u_{yz}^2 + G' u_{xx}^3 + G' u_{yy}^3 + (\lambda' + 2\mu') u_{zz}^3 - \theta_{z'}, \\ \theta_t + u_{tx}^1 + u_{ty}^2 + u_{tz}^3 &= \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}.\end{aligned}\tag{5}$$

Модель (5) является основным объектом исследования в настоящей статье.

**Некоторые точные решения.** По алгоритму, приведенному в [10–12], выполнено групповое расслоение системы дифференциальных уравнений второго порядка, задающей эту модель, относительно псевдогруппы, порождаемой градиентом гармонической функции, и преобразования переноса для

температуры, допускаемой этой системой. В результате получена система дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентная уравнениям (5). Найдены два точных инвариантных решения этой системы, которые описывают принципиально разные режимы динамического деформирования термоупругой трансверсально-изотропной среды. Для выяснения их физического смысла приведены графики, характеризующие изменение с ростом времени  $t > 0$  деформируемой вектором перемещений и температурой единичной сферы  $\Gamma$ , заданной уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1,$$

где ее центр  $(x_0, y_0, z_0)$  выбирается так, чтобы данная поверхность находилась внутри деформируемой среды.

Первое решение определяется по формулам:

$$\begin{aligned} u^1(t, x) &= \frac{k(\alpha t - x)(\ln(l(\alpha t - x)) - 1)}{\alpha} + \\ &+ c_6 t + \frac{3kl}{5\alpha} \ln x + \frac{kl}{3\alpha} \ln(yz) + \frac{c_2 z}{2} - \frac{c_3 y}{2} + \frac{c_4 x}{3} + c_7, \\ u^2(t, x) &= c_8 t + \frac{2kl}{15\alpha} \ln(xy) + \frac{c_3 x}{2} + \frac{c_4 y}{3} - \frac{c_1 z}{2} + c_9, \\ u^3(t, x) &= c_{10} t + \frac{2kl}{15\alpha} \ln(xz) - \frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \frac{c_4 z}{3} + c_{11}, \\ \theta(t, x) &= \frac{k \ln(l(\alpha t - x))}{\alpha} + c_5. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\alpha, k, l, c_m (m = 1, 2, \dots, 11)$  – произвольные постоянные.

Пусть  $c_i = 2 (i = 1, 2, 3), c_j = 1 (j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11), \alpha = 2, k = 1, l = -1, x_0 = y_0 = z_0 = 3$ . Рис. 1 ( $k (k = 1, 2, \dots, 6)$ ) показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma$  с центром в точке  $(3, 3, 3)$ .

Из рис. 1 следует, что единичная сфера, расположенная внутри деформируемой среды, незначительно изменяет свою форму. Это означает, что в данном режиме в результате динамического деформирования термоупругой трансверсально-изотропной среды не следует ожидать образования трещин.

Второе решение определяется по формулам:

$$\begin{aligned} u^1(t, x) &= \frac{\alpha^2 k}{3} t^3 + \frac{\alpha}{2} (l - 2kx) t^2 + (kx^2 - lx + r + c_6) t - \\ &- \frac{43kx^3}{210\alpha} + \frac{3lx^2}{10\alpha} + \frac{(5l - 4kx)(y^2 + z^2)}{30\alpha} + \frac{(c_4 \alpha - r)x}{3\alpha} - \frac{c_3 y}{2} + \frac{c_2 z}{2} + c_7, \\ u^2(t, x) &= c_8 t - \frac{kx^2 y}{14\alpha} + \frac{2lxy}{15\alpha} + \frac{c_3 x}{2} + \frac{(c_4 \alpha - r)y}{3\alpha} - \frac{c_1 z}{2} + c_9, \\ u^3(t, x) &= c_{10} t - \frac{kx^2 z}{14\alpha} + \frac{2lxz}{15\alpha} - \frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \frac{(c_4 \alpha - r)z}{3\alpha} + c_{11}, \\ \theta(t, x) &= \frac{k(\alpha t - x)^2 + l(\alpha t - x) + r}{\alpha} + c_5, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha \neq 0, k, l, c_m (m = 1, 2, \dots, 11)$  – произвольные постоянные.

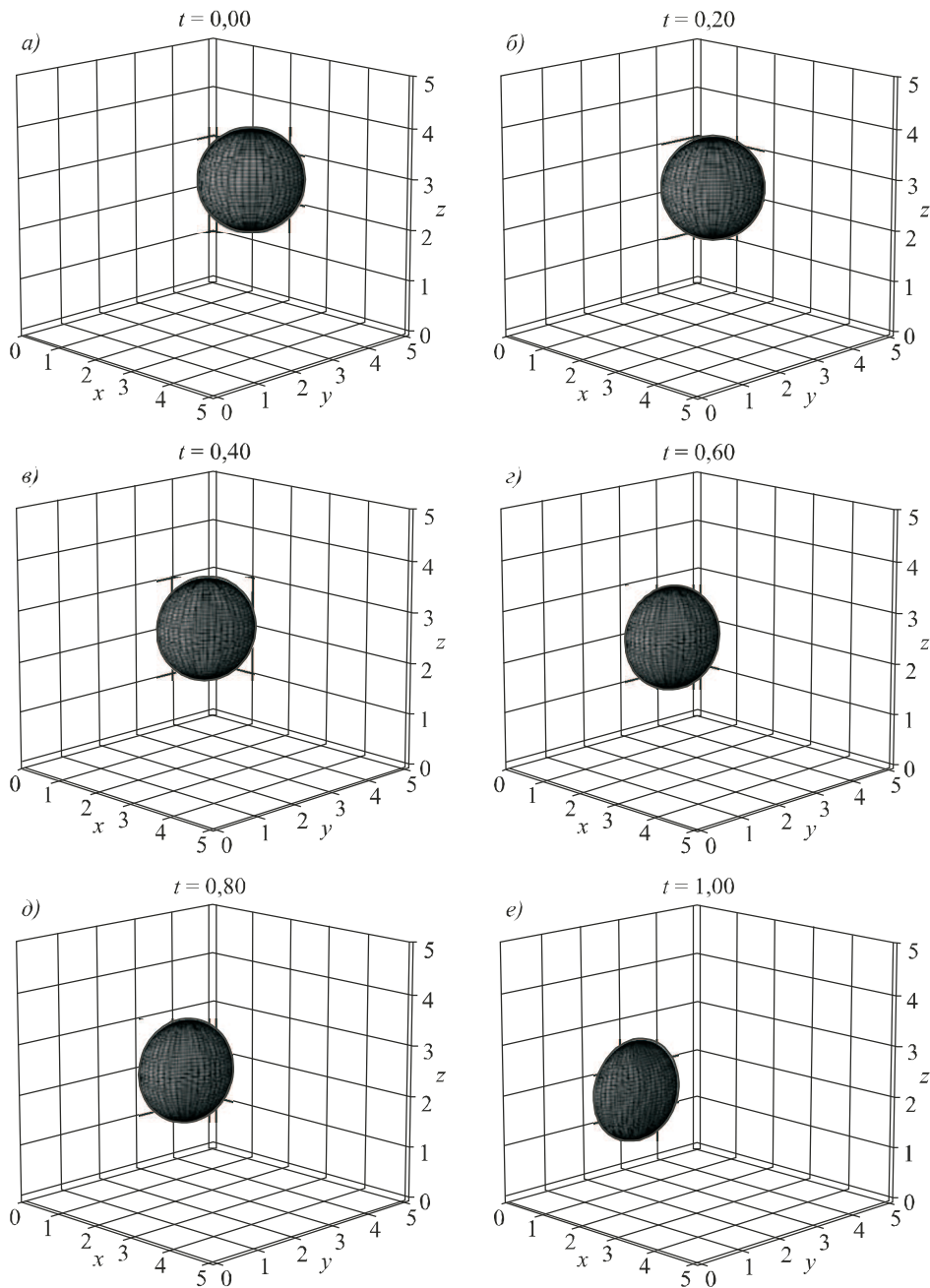


Рис. 1. Незначительное деформирование поверхности  $\Gamma$

Fig. 1. Slight deformation of the surface of the  $\Gamma$

Пусть  $c_i = 2 (i = 1, 2, 3)$ ,  $c_j = 1 (j = 4, 6, 7, 9, 10, 11)$ ,  $c_8 = -8$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k = 3$ ,  $l = 3$ . Рис. 2 (к (к = 1, 2, ..., 6)) показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma$  с центром в точке (2, 2, 2).

Из рис. 2 следует, что единичная сфера, расположенная внутри деформируемой среды, значительно изменяет свою форму, растягиваясь вдоль оси  $Ox$ . Это означает, что в данном режиме в результате динамического деформиро-



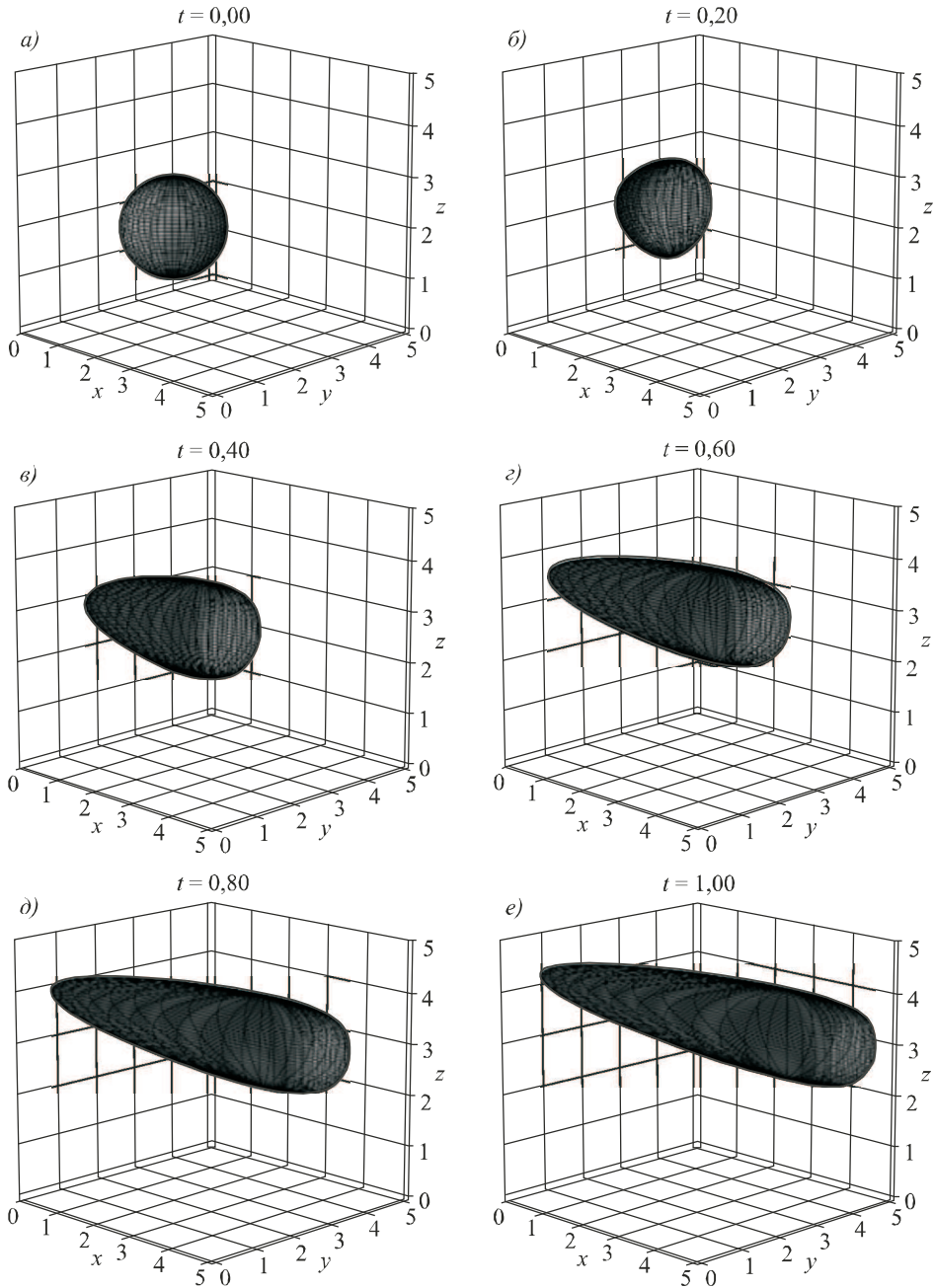


Рис. 2. Значительное деформирование поверхности  $\Gamma$   
 Fig. 2. Significant deformation of the surface of the  $\Gamma$

вания термоупругой трансверсально-изотропной среды следует ожидать образования трещин, параллельных этой оси.

Опыт послойной укладки полистиролбетона с различными режимами термообработки смеси в термореакторе 3D-принтера показывает (рис. 3), что образование трещин на поверхности формируемого слоя происходит не всегда.

Мягкие режимы термообработки позволяют получать слой материала, практически не поврежденный трещинами. Однако такие режимы существ-

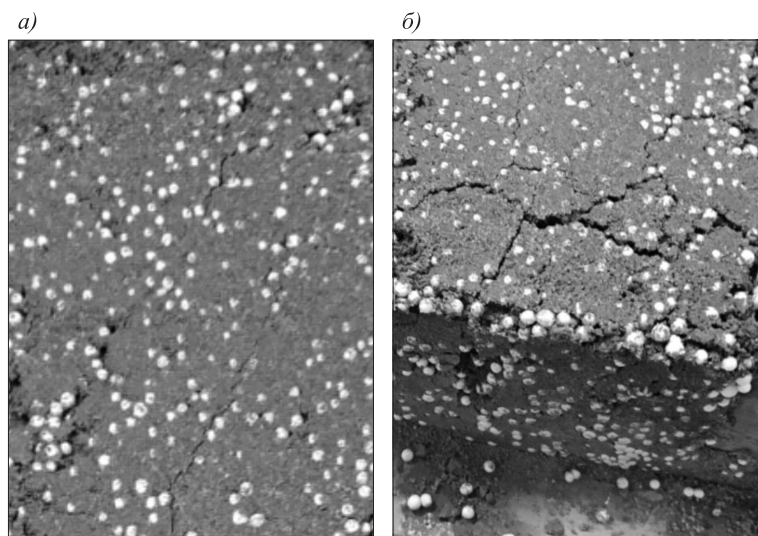


Рис. 3. Фактическое состояние поверхности слоя полистиролбетона на выходе из термореактора 3D-принтера после термообработки с параметрами разогрева без образования трещин (а) и с растрескиванием материала (б)

Fig. 3. The actual state of the surface of the polystyrene concrete layer at the outlet of the 3D printer thermoset after heat treatment with heating parameters without cracking (a) and with cracking of the material (b)

венно снижают темп возведения конструкции, что вряд ли устроит реальное производство. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что отыскание оптимальных режимов термообработки в термореакторе является реальной задачей, результатом которой будет увязка произвольных постоянных, полученных в теоретическом исследовании, с параметрами электроразогрева полистиролбетонной смеси.

**Заключение.** В настоящей работе методами группового анализа дифференциальных уравнений, который является одним из самых мощных и эффективных инструментов получения точных решений, исследовалась трехмерная динамическая модель трансверсально-изотропной термоупругой среды. Выполнено групповое расслоение системы дифференциальных уравнений второго порядка, задающей эту модель, относительно псевдогруппы, допускаемой этой системой, при широко используемых в геофизике условиях Гассмана.

В результате получена система дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентная уравнениям исходной модели. Найдены два точных решения этой системы, которые описывают принципиально разные режимы динамического деформирования термоупругой трансверсально-изотропной среды. Для выяснения их физического смысла приведены графики, характеризующие изменение формы выделенной в трансверсально-изотропной термоупругой среде единичной сферы в результате ее деформации под действием найденных перемещений и температуры. Характер ее деформации определяет возможность появления трещин в изделии и указывает необходимый режим форсированного электроразогрева полистиролбетонной смеси в печатающей головке 3D-принтера, не приводящий к образованию трещин (расслоению) в напечатанном массиве после его укладки в конструкцию.



Полученные зависимости позволяют обоснованно подойти к проектированию печатающей головки принтера и назначению режимов подъема температуры полистиролбетонной смеси в зависимости от рецептуры печатающего материала и температуры окружающей среды. Результаты исследования могут быть использованы при возведении строительных конструкций из полистиролбетона.

#### Список источников

1. Пат. 2 739 244 Российская Федерация. Устройство и способ для изготовления теплоизолирующих стен из полистиролбетона при помощи 3D-принтера / В.В. Молодин, Е.В. Васенков. № 2019111592; заявл. 16.04.2019; опубл. 22.12.2020. Бюл. № 36.
2. *Belgrano F.S., Diegel O., Pereira N., Hatti-Kaul R.* Cell immobilization on 3D-printed matrices: A model study on propionic acid fermentation // *Bioresource Technology*. 2018. Vol. 249. P. 777–782.
3. *Kelly B.E., Bhattacharya I., Heidari H., Shusteff M., Spadaccini C.M., Taylor H.K.* Volumetric additive manufacturing via tomographic reconstruction // *Science*. 2019. Vol. 363. P. 1075–1079.
4. *Han P.* Additive design and manufacturing of jet engine parts // *Engineering*. 2017. Vol. 3, no. 5. P. 648–652.
5. *Satyanarayana B., Prakash Kode J.* Component replication using 3D printing technology // *Procedia Materials Science*. Elsevier BV. 2015. Vol. 10. P. 263–269.
6. *Wang X., Jiang M., Zhou Z., Gou J., Hui D.* 3D printing of polymer matrix composites: A review and prospective // *Composites Part B: Engineering*. 2017. Vol. 110. P. 442–458.
7. *Galante R., Figueiredo-Pina C., Serro A.P.* Additive manufacturing of ceramics for dental applications // *Dental Materials*. 2019. Vol. 35, no. 6. P. 825–846.
8. *Afsana J.V., Haider N., Jain K.* 3D printing in personalized drug delivery // *Current Pharmaceutical Design*. 2019. Vol. 24, no. 42. P. 5062–5071.
9. *Frank K., Yoichiro K., Akira.* 3D printing of continuous carbon fibre reinforced thermo-plastic (CFRTP) tensile test specimens // *Open J. Composite Materials*. 2016. No. 6. P. 18–27.
10. *Ovsyannikov L.V.* Group analysis of differential equations. New York: Academic Press, 1982.
11. *Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В.* Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.
12. *Чиркунов Ю.А.* Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. Новосибирск, 2007. 362 с.
13. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
14. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
15. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 248 с.
16. *Gassmann F.* Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media // *Pure. Appl. Geophysics*. 1964. Vol. 58. P. 1–224.

#### References

1. Pat. 2 739 244 RF. Device and method of manufacturing heat-insulating walls made of polystyrene concrete using a 3D printer. V.V. Molodin, E.V. Vasenkov. No. 2019111592; appl. 16.04.2019; publ. 22.12.2020; Bull. No. 36. (In Russ.).
2. *Belgrano F.S., Diegel O., Pereira N., Hatti-Kaul R.* Cell immobilization on 3D-printed matrices: A model study on propionic acid fermentation. *Bioresource Technology*. 2018; (249): 777–782.

3. Kelly B.E., Bhattacharya I., Heidari H., Shusteff M., Spadaccini C.M., Taylor H.K. Volumetric additive manufacturing via tomographic reconstruction. *Science*. 2019; (363): 1075–1079.
4. Han P. Additive design and manufacturing of jet engine parts. *Engineering*. 2017; 3(5): 648–652.
5. Satyanarayana B., Prakash Kode J. Component replication using 3D printing technology. *Procedia Materials Science. Elsevier BV*. 2015; (10): 263–269.
6. Wang X., Jiang M., Zhou Z., Gou J., Hui D. 3D printing of polymer matrix composites: A review and prospective. *Composites Part B: Engineering*. 2017; (110): 442–458.
7. Galante R., Figueiredo-Pina C., Serro A.P. Additive manufacturing of ceramics for dental applications. *Dental Materials*. 2019; 35(6): 825–846.
8. Afsana J.V., Haider N., Jain K. 3D printing in personalized drug delivery. *Current Pharmaceutical Design*. 2019; 24(42): 5062–5071.
9. Frank K., Yoichiro K., Akira. 3D printing of continuous carbon fibre reinforced thermo-plastic (CFRTP) tensile test specimens. *Open J. Composite Materials*. 2016; (6): 18–27.
10. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. New York: Academic Press, 1982.
11. Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. The elements of symmetry analysis of differential equations of continuous medium mechanics. Novosibirsk, 2012. 659 p. (In Russ.).
12. Chirkunov Yu.A. Group analysis of linear and quasi-linear differential equations. Novosibirsk, 2007. 362 p. (In Russ.).
13. Novatskiy V. Theory of elasticity. Moscow, 1975. 872 p. (In Russ.).
14. Chernykh K.F. Introduction to anisotropic elasticity. Moscow, 1988. 192 p. (In Russ.).
15. Ilyushin A.A. Mechanics of continuous medium. Moscow, 1990. 248 p. (In Russ.).
16. Gassmann F. Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media. *Pure. Appl. Geophysics*. 1964; (58): 1–224.

#### Информация об авторах

**Ю.А. Чиркунов** – доктор физико-математических наук, доцент

**Е.О. Пикмуллина** – инженер

**В.В. Молодин** – доктор технических наук, доцент

**А.А. Лapidус** – доктор технических наук, профессор

**Д.В. Топчий** – доктор технических наук, доцент

#### Information about the authors

**Yu.A. Chirkunov** – DSc, Ass. Professor

**E.O. Pikmullina** – Engineer

**V.V. Molodin** – DSc, Ass. Professor

**A.A. Lapidus** – DSc, Professor

**D.V. Topchiy** – DSc, Ass. Professor

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 25.02.2022  
Одобрена после рецензирования 25.03.2022  
Принята к публикации 01.04.2022

The article was submitted 25.02.2022  
Approved after reviewing 25.03.2022  
Accepted for publication 01.04.2022