

УДК 531/534

В.Н. СИДОРОВ, Е.С. БАДЬИНА

**РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
С УЧЕТОМ НЕЛОКАЛЬНОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ***

В статье рассматривается моделирование затухания колебаний балочного конструктивного элемента, выполненного из терморезистивного винилэфирного стеклопластика. При моделировании методом конечных элементов учтены внешнее демпфирование (трение о внешнюю среду) и внутреннее демпфирование (внутреннее трение). При этом внешнее демпфирование считается локальным во времени, зависящим от скорости перемещений точек элемента только в текущий момент времени, а внутреннее демпфирование представлено нелокальным, учитывающим скорости перемещений и в предшествующий временной этап. Приведен метод определения параметров нелокальной модели по данным численного или физического эксперимента. Показано преимущество использования более гибкой нелокальной модели вместо локальной (гипотезы Фойгта) при моделировании колебаний балки, выполненной из ортотропного материала.

К л ю ч е в ы е с л о в а: нелокальное демпфирование, колебания балок, композитные материалы, нелокальная механика, метод конечных элементов.

DOI 10.32683/0536-1052-2021-746-2-24-32

Введение. В последние годы в строительной практике все большее распространение получают композитные и наноматериалы, одним из весомых преимуществ которых является возможность управления их физическими свойствами за счет выбора различных комбинаций матриц и связующих, обладающих различными физическими характеристиками. При расчете элементов строительных конструкций, выполненных из таких материалов, как правило, создаются подробные трехмерные конечно-элементные модели, позволяющие задать различные свойства материала в разных направлениях.

Известную сложность представляет задача моделирования физических свойств и в особенности процесса демпфирования колебаний в элементах конструкций, выполненных из композитных материалов. Часто использование плоских расчетных моделей является более целесообразным по сравнению с подробным трехмерным моделированием. В таких случаях требуются модели демпфирования достаточно гибкие и управляемые для того, чтобы адекватно описывать процесс развития вынужденных колебаний конструкций, выполненных из анизотропных материалов. В качестве таких моделей могут быть использованы модели нелокального демпфирования.

В работе [1] рассматриваются четыре модели демпфирования: модель вязкого трения (модель Фойгта), частотно-независимая модель внутреннего

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-19-00634.

трения (модель Сорокина), временной гистерезис и пространственный гистерезис. Последние две модели являются нелокальными, пространственный гистерезис представляет собой модель демпфирования, нелокальную по координате, а временной гистерезис – модель демпфирования, нелокальную по времени. Кроме того, в [1] отмечается, что наиболее точного соответствия результатов математического моделирования экспериментальным данным позволяет добиться одновременный учет внешнего и внутреннего демпфирования в модели.

Модель демпфирования, нелокальная по координате, рассматривается в работах [2–6]. Предполагается, что демпфирование в некоторой точке стержня с координатой x_1 , отсчитываемой вдоль его оси, зависит не только от локального значения скорости изменения деформаций в той же точке $\dot{\epsilon}(x_1)$, но и от значения скоростей изменения деформаций в соседних точках на некоторой области, прилегающей к рассматриваемой точке.

В статье [5] показано, что результаты, полученные с помощью такой нелокальной модели, в значительной степени совпадают с результатами, полученными с использованием трехмерной конечно-элементной модели композитного стержня, учитывающей ортотропию материала. Однако то обстоятельство, что выбираемая закономерность, описывающая изменение влияния точек друг на друга, может «перешагивать» через границы соседствующих конечных элементов, делает формирование, к примеру, конечно-элементной модели колеблющегося стержня с использованием модели внутреннего трения, нелокального по координате, неоправданно усложненным.

Поскольку метод конечных элементов является доминирующим численным методом решения инженерных задач, возникает необходимость адаптации под него модели нелокального демпфирования или поиска такой модели внутреннего трения, которая одновременно могла бы быть органично вписана в алгоритм метода конечных элементов и обладала бы достаточной точностью и гибкостью.

Известны эффективные результаты аналитического решения задач о колебаниях элементов строительных конструкций с учетом нелокальности диссипативных свойств во времени [1], но мало перспективные для компьютерного моделирования. В настоящей работе рассматривается численная динамическая модель демпфирования, которая учитывает потери на внутреннее и внешнее трение и называется далее «демпфированием с памятью». Она нелокальна по временной координате и адаптирована в алгоритм метода конечных элементов.

Постановка задачи. Предполагается, что внутреннее демпфирование колеблющейся конструкции в текущий момент времени t зависит не только от мгновенного значения скорости изменения перемещений в этот момент времени $\dot{v}(t)$, но и от значений скоростей изменения перемещений в предыдущие моменты времени τ . Причем влияние значений скоростей изменения перемещений в некоторый момент времени τ тем меньше, чем больше временной промежуток между ним и текущим моментом t .

Уравнение равновесия деформируемой в движении конструкции в произвольной ее точке, имеет следующий вид

$$m\ddot{v}(t) + d_{int}\dot{v}(t) + d_{ext}\dot{v}(t) + kv(t) = F(t), \quad (1)$$

где t – момент времени рассматриваемого состояния деформируемой конструкции;

$v(t)$ – перемещения рассматриваемой точки под воздействием внешних сил, количество точек над именем функции показывает порядок производной от этой функции по времени t ;

k – жесткость конструкции в рассматриваемой точке;

d_{int} и d_{ext} – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования конструкции в точке соответственно;

m – масса предельно малого объема деформируемой конструкции в рассматриваемой точке;

$F(t)$ – внешние силы, действующие в рассматриваемой точке конструкции.

В алгоритме метода конечных элементов уравнение равновесия конструкции, деформируемой в движении, представляется в матричном виде [7, 8]

$$M\ddot{\bar{V}}(t) + D_{int}\dot{\bar{V}}(t) + D_{ext}\dot{\bar{V}}(t) + K\bar{V}(t) = \bar{F}(t). \quad (2)$$

Здесь K – матрица жесткости конечно-элементной расчетной модели;

D_{int} и D_{ext} – матрицы внутреннего и внешнего демпфирования расчетной модели соответственно;

M – матрица масс расчетной модели;

$\bar{F}(t)$ – вектор внешних силовых воздействий.

Матрицы D_{int} и D_{ext} строятся из условий стационарности выражения изменения полной энергии деформируемой системы, включающего функцию рассеяния энергии из-за внутреннего трения в материале $\frac{1}{2}d_{int}\dot{\varepsilon}^2$ (где ε – деформации материала конструкции), а также функцию рассеяния энергии за счет внешнего трения $\frac{1}{2}d_{ext}\dot{v}^2$ (диссипативную функцию Рэлея).

Чтобы построить вычислительную модель «демпфирования с памятью», представим уравнение (2) в виде

$$M\ddot{\bar{V}}(t) + D_{int}\int_0^t G(t-\tau)\dot{\bar{V}}(\tau)d\tau + D_{ext}\dot{\bar{V}}(t) + K\bar{V}(t) = \bar{F}(t). \quad (3)$$

Здесь $G(t-\tau)$ – ядро оператора внутреннего демпфирования. Эта функция описывает убывание влияния скорости изменения деформаций в момент времени τ на демпфирование в текущий момент t , причем

$$\int_0^t G(t-\tau)d\tau = 1. \quad (4)$$

В качестве ядровой функции используется функция ошибок, которая, соблюдая условие (4), имеет вид

$$G(t-\tau) = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2(t-\tau)^2}, \quad (5)$$

где μ – параметр, характеризующий масштаб нелокальности демпфирования материала.

Пример численного решения. Рассмотрим динамическое поведение изгибаемого бруса длиной 6,0 м прямоугольного поперечного сечения, выполненного из терморепактивного винилэфирного стеклопластика I класса. Брус зашпелен по концам и приведен в движение мгновенно приложенной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 10$ кН/м.

Характеристики терморепактивного винилэфирного стеклопластика определялись экспериментально в работах [9–11]:

Модуль Юнга в продольном направлении E_{lv}	17,2 ГПа
Модуль Юнга в поперечном направлении E_{cv}	12,2 ГПа
Коэффициент Пуассона в продольном направлении μ_{lv}	0,32
Коэффициент Пуассона в поперечном направлении μ_{cv}	0,15
Плотность материала ρ	1,9 кН/м ³
Коэффициент внутреннего демпфирования d_{int}	0,042
Коэффициент внешнего демпфирования d_{ext}	0,0009

Коэффициент внешнего демпфирования вычислен по формуле Нью-элла [12].

Для решения уравнения динамического равновесия используем метод центральных разностей [7]. Для этого участвующие в выражениях (2) и (3) первую и вторую производные по времени от вектора перемещений $\bar{V}(t)$ аппроксимируем центральными конечными разностями:

$$\ddot{\bar{V}}(t) \approx \ddot{\bar{V}}_i = \frac{1}{\Delta t^2}(\bar{V}_{i+1} - 2\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}), \quad \dot{\bar{V}}(t) \approx \dot{\bar{V}}_i = \frac{1}{2\Delta t}(\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i-1}). \quad (6)$$

Здесь $i = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер рассматриваемого момента времени t ; Δt – шаг по времени.

Таким образом, в соответствии с методом центральных разностей матричное уравнение (2) принимает вид

$$\frac{1}{\Delta t^2} M(\bar{V}_{i+1} - 2\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}) + \frac{1}{2\Delta t} (D_{int} + D_{ext})(\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i-1}) + K\bar{V}(t) = \bar{F}_i. \quad (7)$$

Чтобы заменить классическую модель внутреннего демпфирования на модель «демпфирования с памятью», представим сначала центральную разность во втором слагаемом левой части уравнения (7), отвечающем за внутреннее демпфирование, как сумму разности «вперед» и разности «назад»

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} M(\bar{V}_{i+1} - 2\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}) + \frac{1}{2\Delta t} D_{int}(\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}) + \frac{1}{2\Delta t} D_{int}(\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i) + \\ + \frac{1}{2\Delta t} D_{ext}(\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i-1}) + K\bar{V}(t) = \bar{F}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Слагаемое с разностью «вперед» оставим без изменений, так как на него эффект памяти по понятным причинам не распространяется. Слагаемое с разностью назад заменим выражением

$$\frac{1}{2\Delta t} D_{int}(\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}) = \frac{D_{int}}{2} \sum_{j=1}^i \bar{G}(i, j)(\bar{V}_j - \bar{V}_{j-1}), \quad (9)$$

где i – номер шага по времени, соответствующий рассматриваемому моменту времени t , $t = \Delta t i$, $\tau = \Delta t j$;

$j = 1, 2, \dots, i$ – номер шага по времени при вычислении ядра $G(i, j)$. При численном интегрировании мы будем использовать шаг $\Delta\tau = \Delta t$.

Слагаемое (9) моделирует «демпфирование с памятью», причем $\bar{G}(i, j)$ – дискретный аналог ядра $G(t - \tau)$ (5), который в случае использования ядра в виде непрерывной функции ошибок вычисляется по формуле

$$\bar{G}(i, j) = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 \left(t - \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \right)^2}. \quad (10)$$

В результате таких преобразований выражение (8) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} M (\bar{V}_{i+1} - 2\bar{V}_i + \bar{V}_{i-1}) + \frac{D_{int}}{2} \bar{Z} + \frac{1}{2\Delta t} D_{int} (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_i) + \\ & + \frac{1}{2\Delta t} D_{ext} (\bar{V}_{i+1} - \bar{V}_{i-1}) + K \bar{V}(t) = \bar{F}_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\bar{Z} = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 \left(t - \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \right)^2} (\bar{V}_i - \bar{V}_{i-1}). \quad (12)$$

Преобразуем (11) в вычислительную схему для последовательного пошагового вычисления \bar{V}_{i+1} через векторы \bar{V}_i и \bar{V}_{i-1} , которые были вычислены на предыдущих шагах

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} D_{int} + \frac{1}{2\Delta t} D_{ext} \right) \bar{V}_{i+1} + \left(-\frac{2}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} D_{int} + K \right) \bar{V}_i + \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} D_{ext} \right) \bar{V}_{i-1} + \frac{D_{int}}{2} \bar{Z} = \bar{F}_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим в (13):

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} D_{int} + \frac{1}{2\Delta t} D_{ext} \right)^{-1}, \\ Q_1 &= Q \left(-\frac{2}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} D_{int} + K \right), \\ Q_2 &= Q \left(\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} D_{ext} \right), \quad Q_3 = \frac{1}{2} Q D_{int}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда схема пошагового решения во времени дискретного уравнения движения (13) с использованием принятой модели демпфирования материала, обладающего памятью, приобретает вид

$$\bar{V}_{i+1} = Q \bar{F}_i - Q_1 \bar{V}_i - Q_2 \bar{V}_{i-1} - Q_3 \bar{Z}. \quad (15)$$

На первом шаге при $i = 1$ примем в качестве начальных условий $\bar{V}_0 = 0$ и $\bar{V}_1 = 0$.

Результаты численного решения. Вычислительная модель колебаний стержня с учетом демпфирования материала, «обладающего памятью», была реализована в программном комплексе MATLAB. Для того чтобы сделать

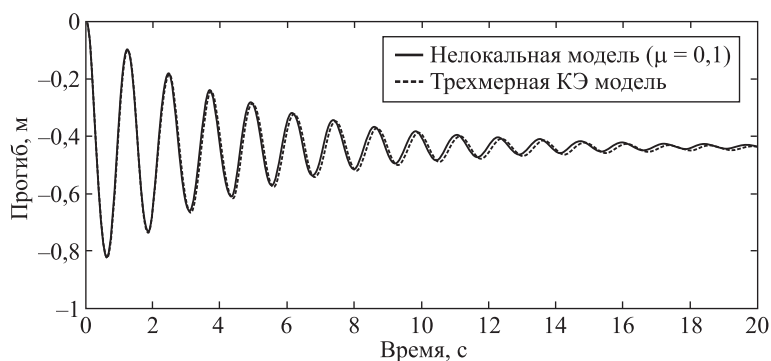


Рис. 1. Сравнение результатов, полученных с использованием откалиброванной нелокальной модели, с данными численного эксперимента

эту модель рабочей, в алгоритме реализована калибровка ее параметров по результатам данных эксперимента.

Параметр μ характеризует степень нелокальности демпфирования среды. Чем μ выше, тем ближе модель к классической «локальной», при малых значениях μ материал обладает значительной степенью нелокальности во времени.

В [5] приведена методика определения параметра μ на основании данных численного эксперимента с использованием метода наименьших квадратов. Эта методика применялась для подбора масштаба влияния для модели «демпфирования с памятью» и в этой работе. С этой целью была сформирована трехмерная конечно-элементная модель рассматриваемого стержневого элемента в верифицированном расчетном программном комплексе SIMULIA Abaqus CAE. Полученные данные были импортированы в программный комплекс MATLAB.

Значение подобранного параметра $\mu = 0,1$ 1/с. Графики зависимости перемещения среднего сечения стержня от времени приведены на рис. 1. Сплошной линией показаны перемещения стержня, полученные с использованием откалиброванной нелокальной модели, а пунктирной – 3D модели, построенной в Abaqus.

Для того чтобы оценить величину расхождения результатов, была вычислена среднеквадратическая ошибка σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - f_i(\mu))^2}{N}}. \quad (16)$$

Относительно прогиба в момент времени 20 с среднеквадратическая ошибка составила 4 %.

На рис. 2 приведено сравнение графика перемещения среднего узла, полученного с использованием классической одномерной модели (модели Кельвина-Фойгта), с данными, полученными в Abaqus.

В этом случае относительная среднеквадратическая ошибка составила 16,7 %.

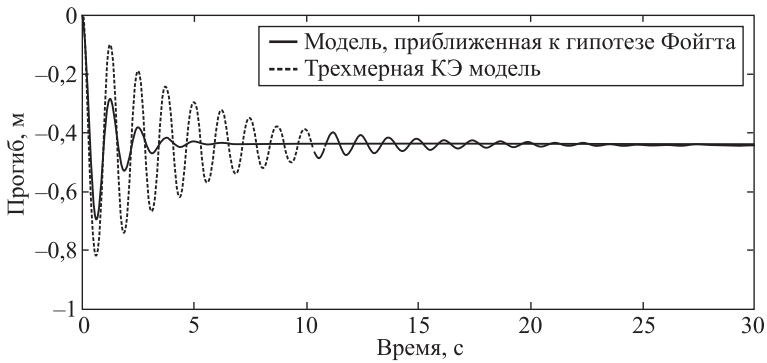


Рис. 2. Сравнение с данными численного эксперимента результатов, полученных с использованием классической модели внутреннего трения

Заключение. В сравнении с традиционными локальными моделями представленная в статье модель позволяет более достоверно и гибко управлять основными характеристиками моделируемого колебательного процесса. Повышенная гибкость дает возможность использовать одномерные модели стержневых элементов при динамическом расчете конструкций из современных композитных материалов, обладающих ортотропными свойствами.

Откалиброванная с использованием метода наименьших квадратов модель демпфирования с памятью позволяет с удовлетворительной точностью аппроксимировать данные численного эксперимента.

В сравнении с моделью внутреннего трения, нелокального по координате, модель демпфирования с памятью может быть легко встроена в алгоритм метода конечных элементов, что делает сравнительно несложным ее применение для численного решения прикладных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams // Journal of Applied Mechanics. 1991. Vol. 58(3). P. 716–723.
2. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. A Galerkin method for distributed systems with non-local damping // Int. Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. P. 3381–3400.
3. Потапов В.Д. Устойчивость стержней при стохастическом нагружении с учетом нелокального демпфирования // Проблемы машиностроения и теории надежности. 2012. № 4. С. 25–31.
4. Fyodorov V.S., Sidorov V.N., Shepitko E.S. Nonlocal damping consideration for the computer modelling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 456. PaperID 012040.
5. Shepitko E.S., Sidorov V.N. Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 675. PaperID 012056.
6. Sidorov V.N., Badina E.S. Computer simulation of structural vibration Damping with allowance for nonlocal properties // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16. No. 4. P. 84–89.
7. Баме К.-Ю., Вулсон Э.Л. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982.

8. Сидоров В.Н., Бадина Е.С. Метод конечных элементов в задачах устойчивости и колебаний стержневых конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2021.
9. Landherr J.C. Dynamic analysis of a FRP deployable box beam. Master of Applied Science Thesis. Kingston: Queen's University, 2008.
10. Lim R.A. Structural monitoring of a 10m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage. Kingston: Queen's University, 2016.
11. Xie A. Development of an FRP deployable bridge, Master of Applied Science Thesis, Department of Civil Engineering, Royal Military College of Canada, 2007.
12. Sumali H., Carne T. Air damping on micro-cantilever beams // Proceedings of the International Modal Analysis Conference, 2008.

Сидоров Владимир Николаевич, д-р техн. наук, проф.;

E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Бадина Елена Сергеевна, канд. техн. наук; E-mail: shepitko-es@mail.ru

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва

Получено 19.01.2021

Sidorov Vladimir Nikolaevich, DSc, Professor; E-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Russia

Badina Elena Sergeevna, PhD; E-mail: shepitko-es@mail.ru

Russian University of Transport (MIIT), Moscow, Russia

BEAM STRUCTURAL ELEMENTS VIBRATION ANALYSIS CONSIDERING NONLOCAL IN TIME DAMPING EFFECTS

The damping of glass-fiber reinforced plastic beam element vibrations is considered in this paper. In the finite element model of the beam external damping (air damping) and internal damping are taken into account. The external part of the damping forces is considered local, i.e. depending on the velocity of element nodes only at the current moment. Internal damping is considered nonlocal, i.e. depending on the velocities on the whole vibration time history. Method of determining of the nonlocal model parameters on the base of numerical or physical experiment data is presented. The advantage of flexible nonlocal damping model over the local one (Kelvin-Voight model) for the orthotropic beam vibration modelling.

Keywords: nonlocal damping, beam vibration, composite materials, nonlocal mechanics, finite element analysis.

REFERENCES

1. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. Journal of Applied Mechanics. 1991. Vol. 58(3). Pp. 716–723.
2. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. A Galerkin method for distributed systems with non-local damping. Int. Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. Pp. 3381–3400.
3. Potapov V.D. Ustoychivost' stержney pri stokhasticheskom nagruzhении s uchetom nelokal'nogo dempfirovaniya [Rod Stability under a stochastic load consider nonlocal damping]. Problemy mashinostroyeniya i teorii nadezhnosti [Problems of Machinery and Reliability]. 2012. No. 4. Pp. 25–31. (in Russian)

4. *Fyodorov V.S., Sidorov V.N., Shepitko E.S.* Nonlocal damping consideration for the computer modelling of linear and nonlinear systems vibrations under the stochastic loads. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2018. Vol. 456. PaperID 012040.
 5. *Shepitko E.S., Sidorov V.N.* Defining of nonlocal damping model parameters based on composite beam dynamic behaviour numerical simulation results. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2019. Vol. 675. PaperID 012056.
 6. *Sidorov V.N., Badina E.S.* Computer simulation of structural vibration damping with allowance for nonlocal properties. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2020. Vol. 16, No. 4. Pp. 84–89.
 7. *Bathe K.Yu., Wilson E.L.* Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov [Numerical methods in finite element analysis]. Moscow, Sroyizdat, 1982. (in Russian)
 8. *Sidorov V.N., Badina E.S.* Metod konechnykh elementov v zadachakh ustoychivosti i kolebaniy sterzhnevyykh konstruksiy [Finite Element Analysis in problems of stability and rod structures vibration]. Moscow, 2021. (in Russian)
 9. *Landherr J.C.* Dynamic analysis of a FRP deployable box beam. Master of Applied Science Thesis. Kingston: Queen's University, 2008.
 10. *Lim R.A.* Structural monitoring of a 10m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage. Kingston: Queen's University, 2016.
 11. *Xie A.* Development of an FRP deployable bridge, Master of Applied Science Thesis, Department of Civil Engineering, Royal Military College of Canada, 2007.
 12. *Sumali H., Carne T.* Air damping on micro-cantilever beams. Proceedings of the International Modal Analysis Conference, 2008.
-