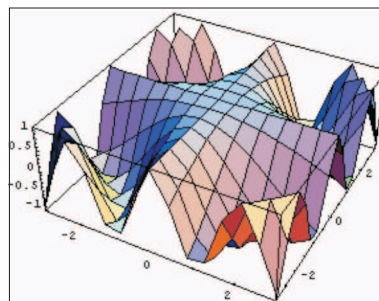


## ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ



УДК 624.074:046.3

А.А. ЖУРАВЛЕВ, Д.А. ЖУРАВЛЕВ

### УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ ТИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И КРУЧЕНИИ

Проводится анализ устойчивости форм равновесия стержневой конструкции в виде гиперболического параболоида при осевом сжатии и кручении. Расчет осесимметричной конструкции пространственной фермы выполняется для случая шарнирно-неподвижного закрепления стержней, размещенных на боковой поверхности гиперболоида, в узлах нижнего контура. Установлена более высокая чувствительность стержневой конструкции к неустойчивости ее равновесного состояния при действии системы самоуравновешенных сил, образующих концевые пары. Исследование упругой устойчивости рассматриваемой стержневой конструкции реализуется в соответствии с основными положениями теории Р. Мизеса.

**Ключевые слова:** стержневая конструкция, устойчивость, гиперболический параболоид, параметр неустойчивости, критическая нагрузка.

DOI 10.32683/0536-1052-2019-732-12-5-12

В большинстве опубликованных работ, относящихся к проблеме упругой устойчивости стержневых конструкций, рассматривались задачи, касающиеся выпучивания простейших систем ферменного типа [1]. Однако вопросы расчета на устойчивость пространственных стержневых конструкций типа гиперболоида, насколько известно авторам, решались лишь с помощью приближенных методов, при этом аппарат строгой теории Р. Мизеса использовался только в нескольких частных случаях, разобранных в исследованиях по теории сооружений [2].

Рассмотрим пространственную стержневую конструкцию с вертикальной осью симметрии в форме гиперболического параболоида, имеющую шарнирные соединения во всех узлах и нагруженную вертикальными силами  $P$  в каждом из шести узлов верхнего контура, имеющего конфигурацию правильного шестиугольника (рис. 1).

При исследовании вопроса об устойчивости стержневой конструкции при осевом сжатии в консервативную систему самоуравновешенных сил входят вертикальные составляющие опорных реакций, приложенные в уз-

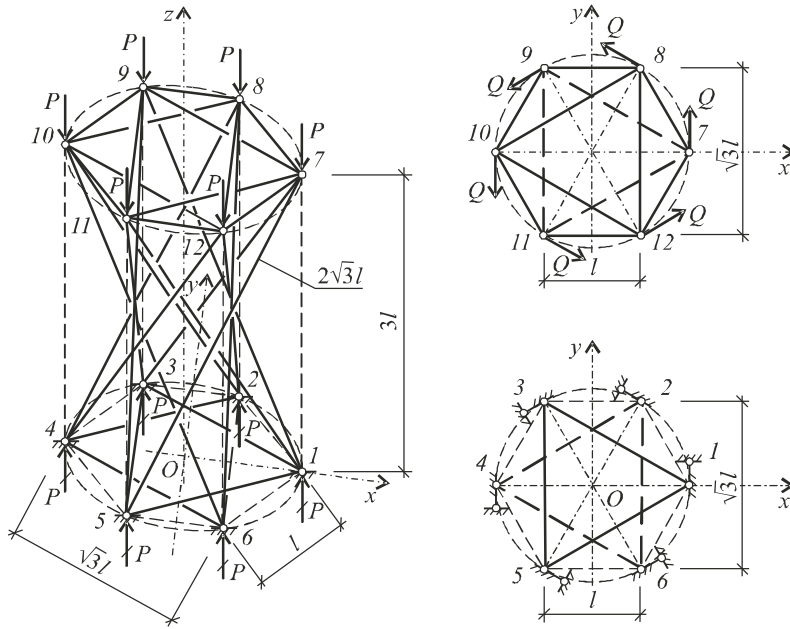


Рис. 1. Стержневая конструкция типа гиперболического параболоида при осевом сжатии

лах нижнего контура, которые изображены наискось перечеркнутыми стрелками.

Предполагается, что все стержни пространственной фермы выполнены из одного и того же материала с модулем упругости  $E$ . Жесткость при растяжении (сжатии) контурных стержней горизонтального шестиугольного кольца составляет  $EF$ , а для внутриконтурных стержней она равна  $\sqrt{3}EF$ . Другими словами, жесткости внутриконтурных и контурных стержней соотносятся между собой так, как и длины стержневых элементов. Легко заметить, что решение поставленной задачи становится особенно привлекательным, если распорядиться жесткостью наклонных стержней аналогичным образом и принять ее равной  $2\sqrt{3}EF$ . В случае, когда длина двенадцати наклонных стержней одинакова и равна  $2\sqrt{3}l$ , высота стержневой конструкции гиперболического параболоида будет  $3l$ .

Отнесем рассматриваемую стержневую конструкцию к прямоугольной декартовой системе координат, поместив ее начало в центр окружности, описанной около нижнего шестиугольного контура и ориентируя ось  $x$  в направлении узла  $1$ . Ось  $z$  совместим с осью вращения осесимметричной стержневой конструкции. Узлы пространственной фермы пронумеруем, начиная с нижнего шестиугольника.

Будем считать, что ферма шарнирно неподвижно опирается в шести узлах нижнего контура, в каждом из которых сходятся по два наклонных стержня. Приняв преднамеренно такой вид опирания, мы вместо 30 уравнений равновесия системы в смещенном состоянии будем иметь 18 уравнений в соответствии с числом степеней свободы рассматриваемой пространственной конструкции.

Для решения поставленной задачи о неустойчивости системы упругих стержней используются основные положения общей теории, разработанной

Р. Мизесом в 1923 г. [3]. Для произвольного узла  $k$  пространственной фермы, в котором сходятся  $i$  стержней, уравнения равновесия системы в смещенном состоянии принимают вид [4]:

$$\sum_i \left\{ \frac{EF}{l} \left[ (\delta x_k - \delta x_i) \left( 1 - \frac{l}{a} \sin^2 \alpha \right) + (\delta y_k - \delta y_i) \frac{l}{a} \cos \alpha \cos \beta + (\delta z_k - \delta z_i) \frac{l}{a} \cos \alpha \cos \gamma \right] \right\}_{ik} = 0, \quad (1)$$

$$\sum_i \left\{ \frac{EF}{l} \left[ (\delta x_k - \delta x_i) \frac{l}{a} \cos \alpha \cos \beta + (\delta y_k - \delta y_i) \left( 1 - \frac{l}{a} \sin^2 \beta_{ik} \right) + (\delta z_k - \delta z_i) \frac{l}{a} \cos \beta \cos \gamma \right] \right\}_{ik} = 0, \quad (2)$$

$$\sum_i \left\{ \frac{EF}{l} \left[ (\delta x_k - \delta x_i) \frac{l}{a} \cos \alpha \cos \gamma + (\delta y_k - \delta y_i) \frac{l}{a} \cos \alpha \cos \gamma + (\delta z_k - \delta z_i) \left( 1 - \frac{l}{a} \sin^2 \gamma \right) \right] \right\}_{ik} = 0. \quad (3)$$

Первоначальная длина стержня между любыми двумя узлами  $i$  и  $k$  здесь считается равной  $l_{ik}$ , а длина этого же стержня после деформирования фермы  $a_{ik}$ . Компонентами малого смещения узла  $k$  являются  $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ , а узла  $i$  соответственно  $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ . Через  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  обозначены углы между стержнями  $ik$  и осями координат  $x, y$  и  $z$ .

Записав уравнения равновесия (1)–(3) для всех свободных узлов пространственной системы, мы получим столько линейных уравнений, сколько имеется независимых перемещений. Принятая смещенная форма становится возможной, когда эти уравнения могут дать для смещений  $\delta x, \delta y$  и  $\delta z$  решения, отличные от нуля. Таким образом, критическая нагрузка вычисляется путем приравнивания нулю определителя полученной системы уравнений, в котором величина  $l/a = \lambda$  является искомым параметром неустойчивости рассматриваемой пространственной конфигурации [5].

При определении внутренних усилий в элементах пространственной стержневой конструкции выберем в качестве лишней неизвестной усилие  $X$  в стержнях верхнего шестиугольного кольца. Нетрудно убедиться, что усилия во всех шести внутриконтурных стержнях будут  $\frac{\sqrt{3}}{6}(P - 2X)$ . В стержнях, лежащих на боковой поверхности гиперboloида, усилия сжатия равны  $-\frac{\sqrt{3}}{3}P$ .

Потенциальная энергия всей системы будет

$$V = 6 \frac{X^2 l}{2EF} + 6 \frac{l_1}{2EF_1} \left[ \frac{\sqrt{3}}{6}(P - 2X) \right]^2 + 12 \frac{l_2}{2EF_2} \left( \frac{\sqrt{3}}{3}P \right)^2. \quad (4)$$

С учетом принятых выше соотношений для длин стержневых элементов и их жесткостей выражение (4) переписывается так

$$V = \frac{3l}{EF} \left[ X^2 + \frac{1}{12} (P - 2X)^2 + \frac{2}{3} P^2 \right]^2. \quad (5)$$

Составляя производную  $\frac{\partial V}{\partial X}$  и приравнявая ее нулю, найдем

$$\frac{\partial V}{\partial X} = 2X - \frac{1}{3}(P - 2X) = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что:

$$X = P/8; \quad N = \sqrt{3}P/8; \quad S = -\sqrt{3}P/3. \quad (7)$$

Положим далее, что в смещенном состоянии верхнее шестиугольное кольцо, узловые точки которого располагались на окружности радиуса  $l$ , перемещается и, занимая новое положение, принадлежит теперь эллипсу.

Это обстоятельство, в свою очередь, приводит к тому, что порядок системы уравнений существенно понижается и позволяет сократить их общее число до десяти. Если же принять во внимание условия симметрии относительно большой и малой осей эллипса, то число уравнений уменьшается до пяти и при этом определитель, состоящий из коэффициентов при неизвестных вариациях смещений, запишется в виде

$6 - 2\lambda_1 - \frac{13}{8}\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_1$	$\frac{3}{4}\lambda_2$	$0$	= 0.
$\frac{3}{4}\lambda_2$	$0$	$0$	$6 - 4\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2$	$-4(1 - \lambda_1)$	
$\frac{1}{2}\lambda_1$	$6 - \lambda_1 - \frac{29}{16}\lambda_2$	$\frac{1}{16}\lambda_2$	$0$	$\frac{3}{8}\lambda_2$	
$\frac{3}{2}\lambda_1$	$\frac{3}{16}\lambda_2$	$6 - \lambda_1 - \frac{27}{16}\lambda_2$	$0$	$\frac{9}{8}\lambda_2$	
$0$	$\frac{3}{8}\lambda_2$	$\frac{3}{8}\lambda_2$	$-2(1 - \lambda_1)$	$4 - 2\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2$	

(8)

Раскрытие определителя (8) приводит к первому из результатов, а именно

$$6 - \lambda_1 - \frac{15}{8}\lambda_2 = 0. \quad (9)$$

При этом между параметрами неустойчивости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  должно всегда выполняться условие в виде уравнения связи, которое в данном случае запишется следующим образом

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 = 7\lambda_1\lambda_2. \quad (10)$$

Исключение одного из неизвестных из уравнений (9) и (10), например,  $\lambda_1$  приводит к квадратному уравнению относительно  $\lambda_2$ , которое суть таково

$$105\lambda_2^2 - 349\lambda_2 + 144 = 0. \quad (11)$$

Из двух корней этого уравнения нас может интересовать только один из них, в частности,  $\lambda_2^{(1)} = 2,8411$ , причем  $\lambda_1^{(1)} = 0,6729$ .

В результате выполнения последующей процедуры раскрытия определителя четвертого порядка находим

$$\lambda_2^2 - 25\lambda_2 + 48 = 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что  $\lambda_2^{(2)} = 2,0957$  и при этом  $\lambda_1^{(2)} = 0,7183$ .

В заключительной части этого решения приходим к характеристическому полиному вида

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2^2 - 64\lambda_2 - 33\lambda_1\lambda_2 - 24(3\lambda_1^2 - 2\lambda_1 - 8) = 0. \quad (13)$$

На рис. 2 полученные соотношения между параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , согласно уравнениям (10) и (13), представлены графически. Легко видеть, что зависимость между параметрами неустойчивости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  по уравнению (13) имеет слабовыраженный нелинейный характер (кривая 1). Что касается криволинейной зависимости (кривая 2), построенной на основании уравнения связи (10), то обе эти кривые в интервале  $0,6 \leq \lambda_1 \leq 1$  пересекаются в точке при  $\lambda_1 = 0,707$  и  $\lambda_2 = 2,23$ . Здесь важно отметить, что с ростом значений параметра  $\lambda_1$  величина  $\lambda_2$  уменьшается. Закономерным является тот факт, что во всех рассмотренных случаях вычисленные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  близки к значениям координат точки пересечения кривых 1 и 2.

При сопоставлении полученных результатов убеждаемся в том, что критическое значение сил  $P$  определяется исключительно решением (12), при котором  $\lambda_2^{(2)} = \frac{1}{2}(25 - \sqrt{433}) \cong 2,096$ .

Соответствующее выражение для критической силы  $P_{кр}$  будет

$$P_{кр} = 2,86EF. \quad (14)$$

Обратимся к случаю кручения описанной выше стержневой конструкции. Допустим, что в каждой из трех пар узлов верхней кольцевой диафрагмы приложены силы  $Q$ , имеющие касательное направление к описанной около шестиугольника окружности, причем так, что  $M_K = Q \cdot 2l$  и векторы моменты пар имеют ориентацию вдоль оси  $z$ .

Здесь, по существу, сохраняется тот же общий подход к решению задачи об устойчивости стержневой конструкции, что и в случае осевого сжатия. Следует подчеркнуть, что этот важный вопрос являлся предметом специального исследования, выполненного в работе [6], где указывается, что катастрофа крупного сооружения водонапорной башни высотой 45 м с емкостью

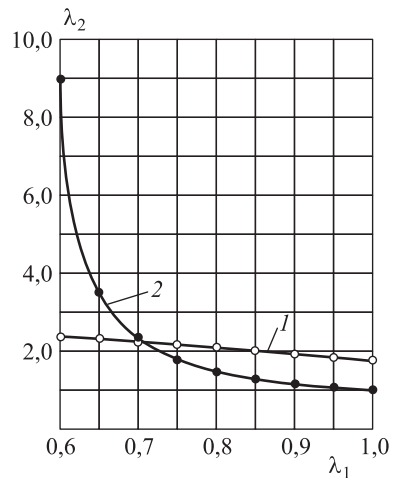


Рис. 2. График зависимостей между параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

резервуара 250 м<sup>3</sup>, остов которой представлял собой сетчатую конструкцию типа гиперboloида, произошла в результате общей потери устойчивости пространственной стержневой системы.

При выбранной схеме нагружения конструкции ферменного типа в стержневых элементах ее верхнего кольца продольные усилия не возникают. Что касается наклонных стержней, располагаемых на боковой поверхности гиперboloида, то в шести стержнях одного из семейств возникают равной величины сжимающие усилия, в то время как в другом семействе из шести стержней встречного направления развиваются такой же величины растягивающие усилия. При одинаковых поперечных сечениях всех наклонных стержней основное напряженное состояние системы здесь полностью соответствует двум первым гипотезам, которые были приняты в свое время Ф.С. Ясинским при решении им задачи об устойчивости раскосов в многорешетчатой ферме [7]. Однако, можно заметить, что если оригинальное решение Ф.С. Ясинского, основанное на этих двух гипотезах, становится неопределенным в силу невозможности их реализации [8], то в данном случае принятые выше начальные условия являются вполне обоснованными и в значительной мере облегчают общий ход решения задачи.

Для рассматриваемого случая осесимметричного деформирования пространственной фермы, при котором допускаются равной величины вертикальные перемещения всех узлов шестиугольного кольца и их также равные смещения в касательном направлении, уравнения устойчивости упрощаются и записываются в виде определителя второго порядка следующим образом

$$\begin{vmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Отсюда непосредственно получаем  $\lambda = 8\sqrt{3}/3$  и далее определяем критическое значение нагрузки

$$Q_{кр} = 1,36EF. \quad (16)$$

Как видим, неустойчивость при осевом сжатии может иметь место при более чем в 2 раза большем уровне узловой нагрузки  $P$  по сравнению с критическим значением сил  $Q$ .

Отметим здесь, что в случае совместного действия осевого сжатия силой  $P$  и кручения  $M_k$  соотношение  $P_{кр}/Q_{кр}$  для индивидуального элемента в виде призматического стержня с одинаковыми моментами инерции относительно главных осей равно  $\pi$  [9]. В рассмотренном случае такого рода соотношение оказалось существенно меньшим  $\pi$ , что связано с совершенно иным поведением стержневых элементов пространственной конструкции типа гиперболического параболоида, когда они не искривляются в процессе потери устойчивости сооружения, а, напротив, сохраняют свою первоначально прямолинейную форму.

В частных случаях осевого сжатия и простого кручения для оценки устойчивости стержневой конструкции типа гиперболического параболоида получены формулы (14) и (16), справедливость которых установлена для двух систем нагрузок  $P$  и  $Q$ , действующих по отдельности.

Устойчивость конструкции при комбинированном нагружении может быть проанализирована с помощью теоремы П.Ф. Папковича [10]. Так, допуская, что  $Q/Q_{кр} = 0,5$  на основании этой теоремы получаем  $P/P_{кр} = 0,866$ . По мере роста значений сил  $Q$  и их приближения к критическому значению, когда, скажем,  $Q/Q_{кр} = 0,707$  для  $P/P_{кр}$  имеем такой же результат. Совершенно очевидно, что спектр численных значений нагрузок осевого сжатия, определяющих область устойчивого равновесия системы, при этом заметно сужается.

Принципиальное значение разобранных примеров потери общей устойчивости стержневой конструкции типа гипербоолоида при осевом сжатии и кручении состоит в том, что в процессе исследования выявлена более высокая чувствительность конструкции к крутильной форме потери устойчивости.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Штаерман И.Я., Пиковский А.А. Методы расчета конструкций на устойчивость. Киев, 1938. 207 с.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
3. Mises R., Ratzendorfer I. Die Knicksicherheit von Fachwerken // Z. für angewandte Math. und Mech. 1925. S. 218–231.
4. Журавлев А.А. Устойчивость упругих систем в форме выпуклых многогранников // Строит. механика и расчет сооружений. 1985. № 6. С. 41–43.
5. Журавлев А.А., Журавлев Д.А. Расчет устойчивости стержневой конструкции многогранной конфигурации // Изв. вузов. Строительство. 2017. № 10. С. 5–13.
6. Динник А.Н., Гришкова Н.П., Лысков В.П. Расчет башен системы Шухова на прочность и устойчивость // Вестн. инженеров и техников. 1933. № 7. С. 288–292.
7. Ясинский Ф.С. О сопротивлении продольному изгибу. СПб., 1902. Т. 1.
8. Бернштейн С.А. Расчет устойчивости раскосов в многорешетчатых фермах / ВИА РККА им. В.В. Куйбышева. М., 1936. 133 с.
9. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
10. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: СКАД СОФТ, 2007. Т. 1. 653 с.

**Журавлев Александр Александрович**, д-р техн. наук, проф.

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

**Журавлев Дмитрий Александрович**, канд. техн. наук, доц.

Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

Получено после доработки 20.11.2019

**Zhuravlev Alexander Alexandrovich**, DSc, Professor

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

**Zhuravlev Dmitriy Alexandrovich**, PhD, Ass. Professor

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia



## **STABILITY OF THE ROD STRUCTURE TYPE OF HYPERBOLIC PARABOLOID AT AXIAL COMPRESSION**

An analysis is made of the stability of the equilibrium forms of the core structure in the form of a single-cavity hyperboloid under axial compression and torsion. The calculation of the axisymmetric design of the spatial truss is performed for the case of pivotally-fixed fastening of the rods placed on the side surface of the hyperboloid at the nodes of the lower contour. A higher sensitivity of the rod structure to the instability of its equilibrium state under the action of a system of self-balanced forces forming end pairs is established. The study of the elastic stability of the considered rod structure is implemented in accordance with the main provisions of the theory of R. Mises.

**Key words:** rod structure, stability, hyperbolic paraboloid, instability parameter, critical load.

### REFERENCES

1. Shtaerman I.Ya., Pikovskiy A.A. *Metody rascheta konstruktsiy na ustoychivost'* [Methods for calculating structural stability]. Kiev, 1938. 207 p. (in Russian)
2. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' uprugikh sistem* [Stability of elastic systems]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1946. 532 p. (in Russian)
3. Mises R., Ratzerdorfer I. Die Knicksicherheit von Fachwerken. *Z. für angewandte Math. und Mech.* 1925. S. 218–231.
4. Zhuravlev A.A. *Ustoychivost' uprugikh sistem v forme vypuklykh mnogogrannikov* [Stability of elastic systems in the form of convex polyhedra]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Building mechanics and calculation of structures]. 1985. No. 6. Pp. 41–43. (in Russian)
5. Zhuravlev A.A., Zhuravlev D.A. *Raschet ustoychivosti sterzhnevoy konstruksii mnogogrannoy konfiguratsii* [Calculation of straight resistance construction of multidimensional configuration]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo* [News of Higher Educational Institutions. Construction]. 2017. No. 10. Pp. 5–13. (in Russian)
6. Dinnik A.N., Grishkova N.P., Lyskov V.P. *Raschet bashen sistemy Shukhova na prochnost' i ustoychivost'* [Calculation of the towers of the Shukhov system for strength and stability]. *Vestnik inzhenerov i tekhnikov* [Bulletin of engineers and technicians]. 1933. No. 7. Pp. 288–292. (in Russian)
7. Yasin'skiy F.S. *O soprotivlenii prodol'nomu izgibu* [On resistance to longitudinal bending.]. St. Petersburg, 1902. Vol. 1. (in Russian)
8. Bernshtejn S.A. *Raschet ustoychivosti raskosov v mnogoreshetchatykh fermakh* [Calculation of the stability of braces in multigrid farms]. Moscow, 1936. 133 p. (in Russian)
9. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow, 1967. 984 p. (in Russian)
10. Perel'muter A.V., Slivker V.I. *Ustoychivost' ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennye problemy* [Stability of structural equilibrium and related problems]. Moscow, 2007. Vol. 1. 653 p. (in Russian)