

УДК 627.83.001.24

В.А. ШАЛАНИН

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ
В РАСЧЕТАХ ПАДЕНИЯ ПОТОКА С УСТУПА**

Одной из важных задач в расчете перепадов и водосбросных сооружений систем гидротехники, мелиорации, водоснабжения и канализации является определение глубины потока на сходе с уступа. Данная характеристика потока влияет на форму струи и дальность ее полета. В гидрометрической практике широко распространен метод определения расходов посредством измерения глубины потока на сходе с уступа. В статье рассматривается применение вариационного принципа наименьшего действия в формулировке Гамильтона для расчета глубины потока на сходе с горизонтального уступа. Получена зависимость определения минимальной глубины с учетом кривизны линий тока в потоке на сходе с уступа и неравномерности распределения скоростей для каналов, площадь живого сечения которых может описываться или аппроксимироваться степенными функциями. Предложены теоретические зависимости для определения расходов для каналов с различным поперечным сечением.

Ключевые слова: вариационный принцип, принцип наименьшего действия, гидрометрия, горизонтальный уступ, водосброс, водослив.

DOI 10.32683/0536-1052-2020-736-4-111-120

Введение. Одной из ключевых величин при расчетах водосбросных и гидрометрических сооружений систем водоснабжения, канализации, гидротехники и мелиорации является глубина потока на сходе с гребня уступа. Данная характеристика в расчете водосливов и перепадов необходима для определения дальности отлета струи и при проектировании форм водосливных поверхностей [1, 2]. На принципе измерения глубины на сходе с уступа основаны методы измерения расходов в малых гидрометрических сооружениях, вследствие практически постоянной пропускной способности при различных напорах, согласно ISO 18481:2017. Теме определения таких глубин посвящено множество работ, наиболее полный и содержательный обзор основных методов представлен в работе [3]. Сложность задачи состоит в наличии водопада на конце сооружения, что не позволяет применять классические методы и уравнения гидравлики, вследствие негидростатического распределения давления в выходном сечении и значительной неравномерности поля скоростей в сечениях потока.

Все классические теоретические методы основаны на большом числе допущений, требуют введения поправочных эмпирических коэффициентов и в них не учитывается неравномерность распределения скоростей в живом сечении потока. Значения корректива кинетической энергии в сечении с критической глубиной и на сходе с уступа принимаются равными. Поставленную задачу можно решить, применив вариационный принцип наименьшего дей-

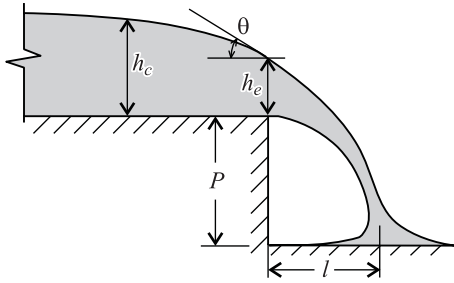


Рис. 1. Расчетная схема падения потока с уступа (P – высота уступа, l – дальность отлета струи)

действием поля сил тяжести, представленного на рис. 1. Участок канала, на котором формируется водопад, короткий, вследствие этого потерями напора можно пренебречь. В решении данной задачи общепринято использовать в качестве искомой характеристики безразмерное соотношение глубины потока на сходе с уступа к критической глубине потока – *EDR* («*end depth ratio*»), введенное Н. Rouse [3, 4]

$$EDR = h_e/h_c, \quad (1)$$

где h_e – глубина потока на сходе с уступа;
 h_c – критическая глубина.

В работе [5] было получено значение минимальной глубины для прямоугольного поперечного сечения потока:

$$L = \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2gh^2b^2} \right) = 0, \quad h = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{2gb^2}}, \quad (2)$$

которое можно распространить на потоки, площадь живого сечения которых описывается степенными функциями вида $\omega = h^N J$:

$$L = \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{2gh^{2n}J^2} \right) = 0, \quad h = \sqrt[2N+1]{\frac{\alpha Q^2}{2gJ^2}}, \quad (3)$$

где L – лагранжиан;
 h – глубина потока;
 J – коэффициент пропорциональности;
 Q – расход потока;
 N – показатель степени.

При сходе потока с уступа образуется участок водопада с криволинейным движением. Под действием кривизны линий тока возникают ощутимые центробежные силы, нормальные к направлению движения, т.е. центробежные силы действуют вниз, как и сила тяжести, следовательно, результирующее давление больше гидростатического, по сравнению с параллельно-струйным движением, $h_p = h + C_r$ [6]. Отклонение от гидростатического давления составит $C_r = h/gV^2/r$, где V – средняя скорость потока в сечении, r – радиус кривизны. С учетом вышеизложенного уравнение (3) принимает вид:

ствия в формулировке Гамильтона. Введение в исходный лагранжиан поправки на увеличение давления вследствие искривления линий тока и на неравномерность распределения поля скорости позволяет определить искомую глубину без введения в уравнение дополнительных эмпирических коэффициентов.

Теоретические исследования.

В задаче рассматривается падение потока с горизонтального уступа под

$$L = \frac{d}{dx}(h + C_r) - \frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2gh^{2n}J^2}\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}(h + h/gV^2/r) - \frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2gh^{2n}J^2}\right) = 0,$$

$$h\left(1 + \frac{V^2}{gr}\right) = {}^{2N+1}\sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2gJ^2}}. \quad (4)$$

Применив уравнение центростремительного ускорения, преобразуем лагранжиан и получим уравнение для определения глубины потока на сходе с уступа в общем виде:

$$L = \frac{d}{dx}(h(1 + \sin\theta)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2gh^{2n}J^2}\right) = 0,$$

$$h = {}^{2N+1}\sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2gJ^2}\left(\frac{1}{1 + \sin\theta}\right)}, \quad (5)$$

где θ – средний угол наклона линий тока.

Для различных форм сечений (рис. 2) уравнения площади в степенной форме имеют вид:

– для прямоугольного сечения потока: $\omega_{\text{пр}} = bh^1$, b – ширина канала;

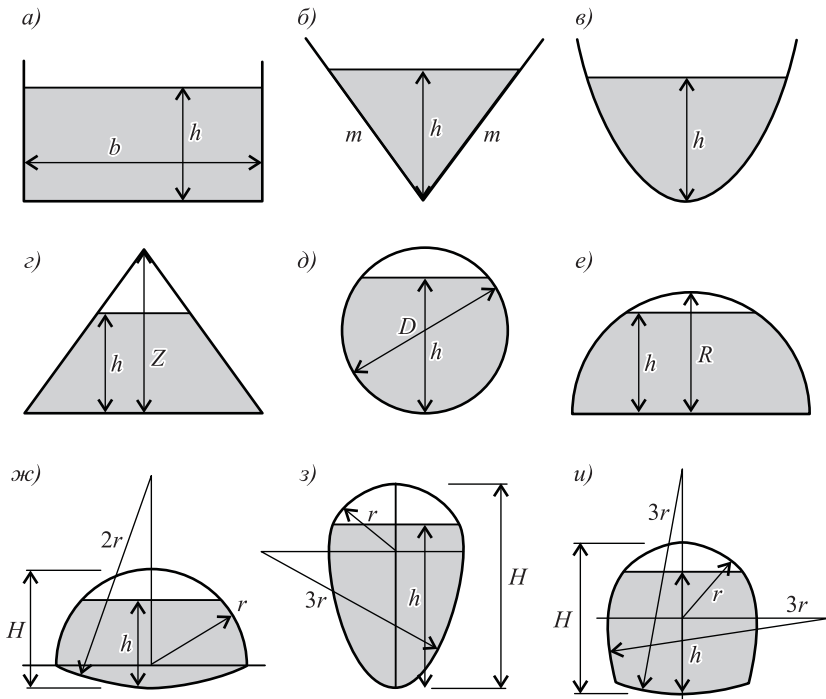


Рис. 2. Схемы расчетных сечений

a – прямоугольное; b – треугольное; c – параболическое; z – Δ -образное; d – круглое; e – полукруглое; $ж$ – лоткообразное; $з$ – оvoidальное; $и$ – радиальное
 D – диаметр канала, R – радиус канала, H – полная высота замкнутого сечения

- треугольного сечения: $\omega_{\text{тр}} = mh^2$, m – коэффициент заложения откосов;
- параболического сечения: $\omega_{\text{пар}} = \frac{4}{3}\sqrt{2ph^{1,5}}$, p – параметр параболы;
- Δ -образного сечения при наполнении до $\frac{h}{z} < 0,55$: $\omega_{\Delta} = J_{\Delta}h^{0,877}$, J_{Δ} – коэффициент пропорциональности. Точность аппроксимации $R^2 = 0,9964$;
- круглого сечения при наполнении до $\frac{h}{D} < 0,65$: $\omega_{\text{кр}} = J_{\text{кр}}h^{1,425}$, $J_{\text{кр}}$ – коэффициент пропорциональности. Точность аппроксимации $R^2 = 0,9988$;
- полукруглого сечения при наполнении до $\frac{h}{R} < 0,8$: $\omega_{\text{пкр}} = J_{\text{пкр}}h^{0,947}$, $J_{\text{пкр}}$ – коэффициент пропорциональности. Точность аппроксимации $R^2 = 0,999$;
- замкнутого лоткового канала [7] при наполнении до $\frac{h}{H} < 0,4$: $\omega_{\text{лот}} = J_{\text{лот}}h^{1,414}$, $J_{\text{лот}}$ – коэффициент пропорциональности. Точность аппроксимации $R^2 = 0,9991$;
- замкнутого овоидального канала [7] при наполнении до $\frac{h}{H} < 0,8$: $\omega_{\text{овоид}} = J_{\text{овоид}}h^{1,43}$, $J_{\text{овоид}}$ – коэффициент пропорциональности. Точность аппроксимации $R^2 = 0,9998$;
- замкнутого радиального канала [7] при наполнении до $\frac{h}{H} < 0,7$: $\omega_{\text{рад}} = J_{\text{рад}}h^{1,2}$, $J_{\text{рад}}$ – коэффициент пропорциональности. Точность аппроксимации $R^2 = 0,9973$.

Величина $\frac{1}{(1+\sin\theta)}$ может принимать значения строго меньше 1, таким

образом глубина потока на сходе с уступа всегда меньше не только критической глубины, но и глубины, полученной посредством принципа наименьшего действия без учета кривизны линий тока. Изменение наклона линий тока принимается непрерывным, тогда средний уклон линий тока в выходном сечении при горизонтальном дне канала определяется как

$$\theta = \frac{\theta_{\text{св.пов.}}}{2}. \quad (6)$$

Угол наклона свободной поверхности над уступом принят $\theta_{\text{св.пов.}} = 14,8^\circ$, согласно исследованиям [8] для прямоугольного поперечного сечения, тогда значение EDR

$$EDR = h_e/h_c = h = \frac{\sqrt[3]{\frac{\alpha_e Q^2}{2gb^2}}}{\sqrt[3]{\frac{\alpha_c Q^2}{gb^2}}} \left(\frac{1}{1+\sin\theta} \right) = \sqrt[3]{\frac{\alpha_e}{\alpha_c}} 0,703. \quad (7)$$

Во всех известных исследованиях по данному вопросу распределение кинетической энергии в сечениях с критической глубиной и на сходе с уступа

принимаются равными. Примем допущение, что корректив кинетической энергии в сечении с критической глубиной $\alpha_c = 1$. На основании экспериментальных данных [2] методом сеток были определены значения $\alpha_e = 1,025$ и $EDR = 0,709$ для прямоугольного сечения. Полученные значения EDR допустимо использовать при расчете малых гидрометрических сооружений, выполненных из материалов с качественно обработанной поверхностью. При расчете крупных бетонных водосбросных сооружений и водопроводных каналов корректив кинетической энергии для сечения с критической глубиной можно определять по формулам [9]:

– В.Н. Евреинова $\alpha = 1 + \frac{210}{C^2}$, где C – коэффициент Шези;

– А.Д. Альтшуля $\alpha = 1 + 2,65\lambda$, где λ – коэффициент гидравлического трения.

Приняв для Δ -образного, полукруглого и радиального замкнутого сечений угол θ как для прямоугольного и $\frac{\alpha_e}{\alpha_c} = 1$, получим значения EDR ,

равные 0,692; 0,701 и 0,721 соответственно. Для треугольного, параболического, круглого, замкнутого лоткового и овоидального сечений принято $\theta_{\text{св. пов}} \approx 11,5^\circ$, согласно профилям свободной поверхности потока в треугольном канале по экспериментальным данным [10, 11], тогда EDR равно 0,7904; 0,764; 0,758; 0,757 и 0,759 соответственно.

Результаты сравнения полученных теоретических результатов, без учета корректива кинетической энергии, с экспериментальными и теоретическими исследованиями других авторов сведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Сравнение расчетного метода с результатами других исследователей, без учета неравномерности распределения скоростей

Источник	EDR	Процентное расхождение
1	2	3
<i>Прямоугольное сечение</i>		0,703
М.Н. Diskin [12]	0,731	–3,98
N. Rajaratnam и D. Muralidhar [13]	0,715	–1,71
	0,705	–0,28
H. Rouse [4], V. Ferro [14], Ali R. Vatankhah [15]	0,715	–1,71
D.A. Kraijenhoff и A. Dommerholt [16]	0,714	–1,56
E. Marchi [17]	0,706	–0,43
Murty Bhallamudi S. [18]	0,705	–0,28
M.K. Beirami, S.V. Nabavi, M.R. Chamani [19]	0,702	0,14
W. Hager [20]	0,696	0,99
Anderson [21]	0,694	1,28
S.Tigrec, C. Ersen Firat, A. Metin Ger [22]	0,683	2,84
K.H.M. Ali и A. Sykes [23]	0,678	3,55
T. Strelkoff и M.S. Moayeri [24]	0,672	4,41

Окончание табл. 1		
1	2	3
<i>Треугольное сечение</i>		0,7904
Ali R. Vatankhah [15]	0,817	-3,36
M.K. Beirami, S.V. Nabavi и M.R. Chamani [19]	0,805	-1,84
Z. Ahmad [15]	0,802	-1,47
K.H.M. Ali и A. Sykes [23]	0,798	-0,96
N. Rajaratnam и D. Muralidhar [13] Murty Bhallamudi S. [18]	0,795	-0,58
Anderson [21]	0,762	3,6
<i>Параболическое сечение</i>		0,764
Ali R. Vatankhah [15]	0,777	-1,7
N. Rajaratnam и D. Muralidhar [13]	0,772	-1,04
M.K. Beirami, S.V. Nabavi, M.R. Chamani [19]	0,764	0
Murty S. Bhallamudi [18]	0,758	0,78
K.H.M. Ali и A. Sykes [23]	0,747	2,22
Anderson [21]	0,735	3,79
<i>Δ-образное сечение</i>		0,692
M.K. Beirami, S.V. Nabavi, M.R. Chamani [19]	0,702	-1,44
	0,686	0,87
S. Dey и B.R. Kumar [25] $\frac{h}{H} < 0,7$	0,695	-0,43
<i>Круглое сечение</i>		0,758
C.D. Smith [26]	0,772	-1,8
M.K. Beirami, S.V. Nabavi, M.R. Chamani [19]	0,756	0,26
S. Dey [27]	0,75	1,06
M. Sterling и D.W. Knight [28]	0,743	1,97
N. Rajaratnam и D. Muralidhar [28]	0,725	4,35
<i>Полукруглое сечение</i>		0,701
Z. Ahmad [29]	0,713	-1,71
R.V. Raikar, D.N. Kumar, S. Dey [30]	0,705	-0,57
M.K. Beirami, S.V. Nabavi, M.R. Chamani [19]	0,700	0,14

Для определения расходов с помощью значения EDR использована формула для каналов, площадь живого сечения которых описывается степенными функциями [15]:

$$Q = \left(\frac{g}{N} \right)^{1/2} J(h_e / EDR)^{N+1/2}. \quad (8)$$

Подставив полученные значения EDR в уравнение (8), были получены зависимости для определения расходов. Они представлены в табл. 2.

Таблица 2. Уравнения расхода для различных форм каналов

Форма сечения	Уравнение глубины на сходе с уступа	Уравнение расхода
Прямоугольное	$h_e = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{2gb^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,69654 \sqrt{gb} h^{1,5}$
Треугольное	$h_e = \sqrt[5]{\frac{\alpha Q^2}{2gm^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,2731 \sqrt{gm} h^{2,5}$
Параболическое	$h_e = \sqrt[4]{\frac{\alpha Q^2}{2g \left(\frac{4}{3} \sqrt{2P} \right)^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,398 \sqrt{g} \left(\frac{4}{3} \sqrt{2P} \right) h^2$
Δ-образное, $\frac{h}{H} < 0,55$	$h_e = 2,754 \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2g(J_\Delta)^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,773 \sqrt{g} J_\Delta h^{1,377}$
Круглое, $\frac{h}{H} < 0,65$	$h_e = 3,85 \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2g(J_{кр})^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,4279 \sqrt{g} J_{кр} h^{1,925}$
Полукруглое, $\frac{h}{H} < 0,8$	$h_e = 2,894 \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2g(J_{пкр})^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,718 \sqrt{g} J_{пкр} h^{1,447}$
Замкнутое лотковое, $\frac{h}{H} < 0,4$	$h_e = 3,828 \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2g(J_{лот})^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,4327 \sqrt{g} J_{лот} h^{1,914}$
Замкнутое овоидальное, $\frac{h}{H} < 0,8$	$h_e = 3,86 \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2g(J_{овоид})^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,4237 \sqrt{g} J_{овоид} h^{1,93}$
Замкнутое радиальное, $\frac{h}{H} < 0,7$	$h_e = 3,4 \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{2g(J_{рад})^2} \left(\frac{1}{1 + \sin \theta} \right)}$	$Q = 1,5918 \sqrt{g} J_{рад} h^{1,7}$

Заключение. Сравнение экспериментальных и теоретических данных различных авторов с расчетами по принципу наименьшего действия показало высокую точность предложенного метода, величина расхождения во всех случаях не превышает 4,5%. Применение вариационного принципа наименьшего действия к задаче определения глубины на сходе с уступа позволяет получить значения *EDR* без введения дополнительных эмпирических коэффициентов для потоков, площадь живого сечения которых можно представить в виде степенной функции. Результаты сравнения данных по прямоугольным сечениям говорят о том, что отношением коррективов кинетической энергии можно пренебречь без значительных потерь в качестве расчетов.

Представленный метод не позволяет учитывать уклон и шероховатость поверхности канала, тем не менее согласно исследованиям [22] при соблюдении условия $\sqrt{s} / n < 5$ (где *s* – уклон канала и *n* – коэффициент шероховатости канала) значения *EDR* и расхода практически не изменяются. Принцип наименьшего действия неприменим при наличии сверхкритического потока в канале, что не позволяет использовать его при расчетах выходных горизонтальных участков быстротоков и отводных каналов при истечении из-под затворов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чугаев Р.Р. Гидравлика. М.: Бастет, 2008. 672 с.
2. Zachoval Zbyněk, Böhm Petr, Parilkova Jana, Šafář Robert, Šulc Jan. Shape of the nappe during free overfall from a rectangular channel with zero bed slope // *Journal of Hydrology and Hydromechanics*. 2013. No. 61.
3. Dey S. Free overfall in open channels: state-of-the-art review // *Flow Meas. Instrum.* 2002. Vol. 13, No. 5–6. P. 247–264.
4. Rouse H. Discharge characteristics of the free overfall // *Civil Engineering, ASCE*. 1936. Vol. 6, No. 4. P. 257–260.
5. Земляная Н.В., Шаланин В.А. Применение вариационного принципа наименьшего действия для расчета уровней воды в водохранилищах // *Вопросы современных технических наук: свежий взгляд и новые решения: Сб. науч. тр. по итогам Междунар. науч.-практ. конф. Владивосток: ИЦРОН, 2015. С. 73–77.*
6. Чоу В.Т. Гидравлика открытых каналов. М.: Стройиздат, 1969. 464 с.
7. Зуйков А.Л. Гидравлика: в 2 т. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2018. Т. 2: Напорные и открытые потоки. Гидравлика сооружений. 2018. 399 с.
8. Davis A.C., Jacob R.P., Elett B.G.S. Estimating trajectory of free overfall nappe // *Journal of Hydraulic Engineering*. 1999. No. 125. P. 79–82.
9. Киселев П.Г. Справочник по гидравлическим расчетам. М.: Эколит, 2011. 312 с.
10. Pagliara Stefano Ph.D. Discussion // *Journal of Hydraulic Research*. 1995. Vol. 33, No. 2. P. 283–286.
11. Peruginelli. Chiamata di sbocco in sezione triangolare // *Idrotecnica*. 1980. No. 2. P. 63–72.
12. Diskin M.H. The end depth at a drop in trapezoidal channels // *Journal of Hydraulic Division ASCE*. 1961. Vol. 87, No. 4. P. 11–32.
13. Rajaratnam N., Muralidhar D. End depth for exponential channels // *J. Irr. Drain Div.* 1964. Vol. 90, No. 1. P. 17–39.
14. Ferro V. Theoretical end-depth-discharge relationship for free overfall // *J. Irr. Drain Eng.* 1999. Vol. 125, No. 1. P. 40–44.
15. Vatankhah A.R. Power-law free overfall in subcritical flow regime // *J. Ain Shams Eng.* 2015. Vol. 6. P. 399–402.
16. Krajenhoff D.A., Dommerholt A. Brink depth method in rectangular channel // *J. Irr. Drain Div.* 1977. Vol. 103, No. 2. P. 171–177.
17. Marchi E. On the free overfall // *J. Hydraul. Res.* 1993. Vol. 31, No. 6. P. 777–790.
18. Bhallamudi S. Murty. End depth in trapezoidal and exponential channels // *Journal of hydraulic research*. 1995. Vol. 33, No. 2. P. 281–282.
19. Beirami M.K., Nabavi S.V., Chamani M.R. Free overfall in channels with different cross sections and sub-critical flow // *Iran. J. Sci. Technol.* 2006. Vol. 30(B1). P. 97–105.
20. Hager W. Hydraulics of plane free overfall // *J. Hydraul. Eng.* 1983. Vol. 109, No. 12. P. 1683–1697.
21. Subramanya K. *Flow in Open Channels*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
22. Tigrek Ş., Firat C.E., Ger A.M. Use of brink depth in discharge measurement // *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 2008. Vol. 134. P. 89–95.
23. Ali Kamil H.M., Ann Sykes. Free-vortex theory applied to free overfalls // *Journal of the Hydraulics Division*. 1972. Vol. 98, No. 5. P. 973–979.
24. Strelkoff T., Moayeri M.S. Pattern of potential flow in a free overfall // *Journal of Hydraulic Division ASCE*. 1970. Vol. 96, No. 4. P. 879–901.
25. Dey S., Kumar B.R. Hydraulics of free overfall in Δ -shaped channels // *Sadhana*. 2002. Vol. 27. P. 353–363.
26. Smith C.D. Brink depth for a circular channel // *Journal of Hydraulic Division ASCE*. 1962. Vol. 88, No. 6. P. 125–134.

27. Dey S. End depth in circular channels // Journal of Hydraulic Engineering ASCE. 1988. Vol. 124, No. 8. P. 856–863.
28. Sterling Mark, Knight D. The free overfall as a flow measuring device in a circular channel // Proceedings of The Institution of Civil Engineers-water Management. 2001. No. 148. P. 235–243.
29. Rajaratnam N., Muralidhar D. End depth for circular channels // Journal of Hydraulic Division ASCE. 1964. Vol. 90, No. 2. P. 99–119.
30. Raikar R.V. and Kumar D. Nagesh, Dey Subhassish. End depth computation in inverted semicircular channels using ANNs // Flow Measurement and Instrumentation. 2004. Vol. 15, No. 5–6. P. 285–293.

Шаланин Виктор Александрович, ст. препод.
Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток

Получено 16.03.2020

Shalanin Viktor Alexandrovich, Senior Lecturer
Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

APPLICATION OF THE PRINCIPLE OF THE LEAST ACTION IN THE CALCULATIONS OF THE FREE OVERFALL

One of the important tasks in calculating the hydraulic drops and spillway structures of different hydraulic systems is to determine the depth of the stream at the end of channel. This flow characteristic affects the shape of the jet and its range. Also, in hydrometric practice, the method of determining the flow rate by measuring the end depth in the free overfall is widely used. The article describes the application of the variational principle of least action in Hamilton's formulation for calculating the end depth of flow at the channel exit from a horizontal ledge. The dependence is obtained for determining the end depth, taking into account the curvature of the streamlines at the channel's end, for cross-sections that can be described or approximated by power functions. The author offers theoretical dependences for determining the flow rates for channels with different cross sections.

Key words: variational principle, principle of least action, hydrometry, horizontal ledge, spillway, spillway, free overfall.

REFERENCES

1. Chugaev R.R. Gidravlika [Hydraulics]. Moscow, 2008. 672 p. (in Russian)
2. Zachoval Zbyněk, Böhm Petr, Parilkova Jana, Šafář Robert, Šulc Jan. Shape of the nappe during free overfall from a rectangular channel with zero bed slope. Journal of Hydrology and Hydromechanics. 2013. No. 61.
3. Dey S. Free overfall in open channels: state-of-the-art review. Flow Meas. Instrum. 2002. Vol. 13, No. 5–6. Pp. 247–264.
4. Rouse H. Discharge characteristics of the free overfall. Civil Engineering, ASCE. 1936. Vol. 6, No. 4. Pp. 257–260.
5. Zemlyanaya N.V., Shalanin V.A. Primenenie variatsionnogo printsipa naimen'shego deystviya dlya rascheta urovney vody v vodokhranilishchakh [Application of the variational principle of least action for calculating water levels in reservoirs]. Voprosy sovremennykh tekhnicheskikh nauk: svezhiy vzglyad i novye resheniya: sb. nauch. tr. po itogam mezhdunar. nauch.-prakt. konf. [Issues of modern technical sciences]. Vladivostok, ICROn, 2015. Pp. 73–77. (in Russian)
6. Chou V.T. Gidravlika otkrytykh kanalov [Open channel hydraulics]. Moscow, Stroyizdat, 1969. 464 p. (in Russian)

7. Zuykov A.L. *Gidravlika: V 2 t. [Hydraulics]. T. 2: Napornye i otkrytye potoki. Gidravlika sooruzheniy [Pressure head and open streanes. Hydraulics of structures].* Moscow, 2018. 399 p. (in Russian)
8. Davis A.C., Jacob R.P., Eillett, B.G.S. Estimating trajectory of free overfall nappe. *Journal of Hydraulic Engineering.* 1999. No. 125. Pp. 79–82.
9. Kisilev P.G. *Spravochnik po gidravlicheskim raschetam [Hydraulic calculations handbook].* Moscow, 2011. 312 p. (in Russian)
10. Pagliara Stefano Ph.D. Discussion. *Journal of Hydraulic Research.* 1995. Vol. 33, No. 2. Pp. 283–286.
11. Peruginelli. Chiamata di sbocco in sezione triangolare. *Idrotecnica.* 1980. No. 2. Pp. 63–72.
12. Diskin M.H. The end depth at a drop in trapezoidal channels. *Journal of Hydraulic Division ASCE.* 1961. Vol. 87, No. 4. Pp. 11–32.
13. Rajaratnam N., Muralidhar D. End depth for exponential channels. *J. Irr. Drain Div.* 1964. Vol. 90, No. 1. Pp. 17–39.
14. Ferro V. Theoretical end-depth-discharge relationship for free overfall. *J. Irr. Drain Eng.* 1999. Vol. 125, No. 1. Pp. 40–44.
15. Vatankhah A.R. Power-law free overfall in subcritical flow regime. *J. Ain Shams Eng.* 2015. Vol. 6. Pp. 399–402.
16. Kraijenhoff D.A., Dommerholt A. Brink depth method in rectangular channel. *J. Irr. Drain Div.* 1977. Vol. 103, No. 2. Pp. 171–177.
17. Marchi E. On the free overfall. *J. Hydraul. Res.* 1993. Vol. 31, No. 6. Pp. 777–790.
18. Bhallamudi S. Murty. End depth in trapezoidal and exponential channels. *Journal of hydraulic research.* 1995. Vol. 33, No. 2. Pp. 281–282.
19. Beirami M.K., Nabavi S.V., Chamani M.R. Free overfall in channels with different cross sections and sub-critical flow. *Iran. J. Sci. Technol.* 2006. Vol. 30(B1). Pp. 97–105.
20. Hager W. Hydraulics of plane free overfall. *J. Hydraul. Eng.* 1983. Vol. 109, No. 12. Pp. 1683–1697.
21. Subramanya K. *Flow in Open Channels.* Tata McGraw-Hill Education, 1987.
22. Tigrek Ş., Firat C.E., Ger A.M. Use of brink depth in discharge measurement. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering.* 2008. Vol. 134. Pp. 89–95.
23. Ali Kamil H.M., Ann Sykes. Free-vortex theory applied to free overfalls. *Journal of the Hydraulics Division.* 1972. Vol. 98, No. 5. Pp. 973–979.
24. Strelkoff T., Moayeri M.S. Peattern of potential flow in a free overfall. *Journal of Hydraulic Division ASCE.* 1970. Vol. 96, No. 4. Pp. 879–901.
25. Dey S., Kumar B.R. Hydraulics of free overfall in Δ -shaped channels. *Sadhana.* 2002. Vol. 27. Pp. 353–363.
26. Smith C.D. Brink depth for a circular channel. *Journal of Hydraulic Division ASCE.* 1962. Vol. 88, No. 6. Pp. 125–134.
27. Dey S. End depth in circular channels. *Journal of Hydraulic Engineering ASCE.* 1988. Vol. 124, No. 8. Pp. 856–863.
28. Sterling Mark, Knight D. The free overfall as a flow measuring device in a circular channel. *Proceedings of The Institution of Civil Engineers-water Management.* 2001. No. 148. Pp. 235–243.
29. Rajaratnam N., Muralidhar D. End depth for circular channels. *Journal of Hydraulic Division ASCE.* 1964. Vol. 90, No. 2. Pp. 99–119.
30. Raikar R.V. and Kumar D. Nagesh, Dey Subhassish. End depth computation in inverted semicircular channels using ANNs. *Flow Measurement and Instrumentation.* 2004. Vol. 15, No. 5–6. Pp. 285–293.