

Известия вузов. Строительство. 2021. № 11. С. 17–27.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2021; (11): 17–27.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 624.04/ 531.64

DOI: 10.32683/0536-1052-2021-755-11-17-27

КРИТИЧЕСКИЕ УРОВНИ ЭНЕРГИИ ИЗГИБАЕМОЙ СИСТЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ОДНА СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ)

Леонид Юлианович Ступишин¹, Владимир Львович Мондрус¹,
Мария Леонидовна Мошкевич²

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

² Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Аннотация. Рассматривается задача об аналогии изгибу на модели системы с одной степенью свободы. В основе методики лежит критерий критических уровней внутренней потенциальной энергии системы. Цель исследования – показать возможность постановок задач продольного и поперечного изгиба с единых позиций как задач потери устойчивости процесса деформирования конструкции. Предложенная модель системы с сосредоточенными параметрами, прошедшая апробирование на задачах устойчивости формы начального состояния системы, исследуется на предмет потери устойчивого состояния деформирования при изгибе. Показаны особенности работы расчетной схемы на возможные изгибающие воздействия, которые моделируют процесс изгиба системы с одной степенью свободы. Приведены зависимости изменения внутренних усилий и деформаций системы на различных этапах отклонений от начального равновесного состояния. Отыскиваются критические значения внутренней потенциальной энергии системы, на которых конструкция меняет закон деформирования или теряет несущую способность. Даны графики зависимости потенциальной энергии системы от параметров состояния конструкции. Показана периодическая и бифуркационная природа задач об изгибании системы с сосредоточенными параметрами. Получены величины критических нагрузок и перемещений системы в момент достижения предельных деформаций. Общность постановки задачи дает возможность вести исследования на действие следящих нагрузок, а также использовать модель для исследования нелинейных задач, температурных и др.

Ключевые слова: критерий критических уровней энергии, предельное состояние, изгибаемые стержневые системы, системы с сосредоточенными параметрами

Для цитирования: Ступишин Л.Ю., Мондрус В.Л., Мошкевич М.Л. Критические уровни энергии изгибаемой системы с сосредоточенными параметрами (одна степень свободы) // Известия вузов. Строительство. 2021. № 11. С. 17–27. DOI: 10.32683/0536-1052-2021-755-11-17-27.

Original article

CRITICAL ENERGY LEVELS OF A BENDING SYSTEM WITH CONCENTRATED PARAMETERS (SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM SYSTEMS)

Leonid Yu. Stupishin¹, Vladimir L. Mondrus¹, Mariya L. Moshkevich²

¹ National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

² The Southwest State University (SWSU), Kursk, Russia

Abstract. The problem of analogy to bending on a model of a system with single-degree-of-freedom is considered. The method is based on the criterion of the critical levels of the internal potential energy of the system. The aim of the study is to show the possibility of setting the problems of longitudinal and transverse bending from a unified position as problems of buckling the process of deformation of a structure. The model of a system with lumped parameters proposed by one of the authors, which has been tested on the problems of stability of the shape of the initial state of the system, is investigated for the loss of a steady state of deformation during bending. The features of the design scheme for possible bending actions that simulate the bending process of a system with one degree of freedom are shown. Dependences of changes in internal forces and deformations of the system at various stages of deviations from the initial equilibrium state are given. The critical values of the internal potential energy of the system are found, at which the structure changes the law of deformation or loses its bearing capacity. The graphs of the dependence of the potential energy of the system on the parameters of the state of the structure are given. The periodic and bifurcation nature of the problems of bending of a system with lumped parameters is shown. The values of critical loads and displacements of the system at the moment of exorbitant values of deformations are obtained. The generality of the problem statement makes it possible to conduct research on the action of tracking loads, as well as to use the model for the study of nonlinear problems, temperature, etc.

Keywords: criterion of critical energy levels, limiting state, bendable rod systems, systems with lumped parameters

For citation: Stupishin L.Yu., Mondrus V.L., Moshkevich M.L. Critical energy levels of a bending system with concentrated parameters (single-degree-of-freedom systems). *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2021; (11): 17–27. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2021-755-11-17-27.

Теория предельного состояния конструкций при изгибе в строительной механике реализуется в два основных этапа. Записываются определяющие соотношения, приводящие к системам алгебраических (дифференциальных, интегральных, вариационных) уравнений, из которых определяются обобщенные перемещения или усилия, а затем записываются условия предельного состояния в точке (сечении) конструкции на основе принятой расчетчиком гипотезы прочности.

Примеры такого подхода видим как в статической [1–6], так и динамической постановке задач [7–9]. Аналогичная методика реализуется и в теории изгиба композитных конструкций [10–12].

В то же время задачи устойчивости и собственных колебаний изгибаемых систем приводят к математическим моделям задач на собственные значения. В качестве условия наступления предельного состояния выступает критерий устойчивости системы при продольном изгибе или условие равен-

ства частот внешнего вынуждающего воздействия и собственной частоты колебаний [13–16].

Разница в постановке упомянутых выше задач заставляет говорить о феноменологическом и гипотетическом подходе к их постановке и решению. В случае феноменологического подхода в основе критерия лежит факт резкого изменения вида напряженно-деформированного состояния системы в процессе нагружения (например, продольное сжатие стержня сменяется изгибом со сжатием). Во втором случае выдвигается гипотеза о невозможности эксплуатации конструкции вследствие достижения обобщенными перемещениями или усилиями некоторых предельных значений. При этом видимых изменений в процессе деформирования конструкции может не наблюдаться, а иногда возможен и дальнейший значительный рост нагрузки.

Интуитивно понятно, что потеря устойчивости и потеря прочности конструкцией являются следствиями одного явления – потери несущей способности от нагрузки, которая сопровождается изменением закона равновесных состояний системы или изменением расчетной схемы (включая разделение на части).

Цель настоящей работы – демонстрация на простой модели изгибаемой балки с одной степенью свободы того факта, что явление потери устойчивости и потеря прочности при изгибе имеют периодическую и бифуркационную природу и могут иметь единообразно формулируемый критерий, а также математическую модель задачи.

Сведения о критерии критических уровней энергии и некоторые аспекты его применения можно найти в [17]. В [18, 19] была показана работоспособность предложенной модели стержня с одной и несколькими степенями свободы на задачах продольного изгиба стержня и проведен сравнительный анализ наиболее популярных в строительной механике критериев устойчивости.

Модель системы с одной степенью свободы, позволяющая исследовать поведение системы при потере прочности от изгиба и от сжатия, представлена на рис. 1, где показаны ситуация с отклонением стержня вследствие изгиба (*a*) и детали упругого шарнира, позволяющего системе иметь продольные и вращательные перемещения (*b*).

К системе, находящейся в состоянии самонапряжения, прикладываются возмущения, заставляющие систему отклоняться от первоначального состояния равновесия. Возникающая в пружинах системы неуравновешенная реакция заставляет верхнюю часть модели смещаться в продольном направлении в момент, когда накопленная потенциальная энергия деформации достигает критического значения. Несмотря на то что конструкция в общем случае имеет две степени свободы, для записи накопленной (расходуемой) внутренней энергии достаточно изменения одного из параметров. Поэтому формально используется на каждом из этапов деформирования только одна степень свободы.

На рис. 2 представлена схема отклоненного от начального состояния равновесия упругого шарнира, позволяющая описать зависимости изменения реактивных сил в упругих пружинах от угла отклонения системы от начального положения.

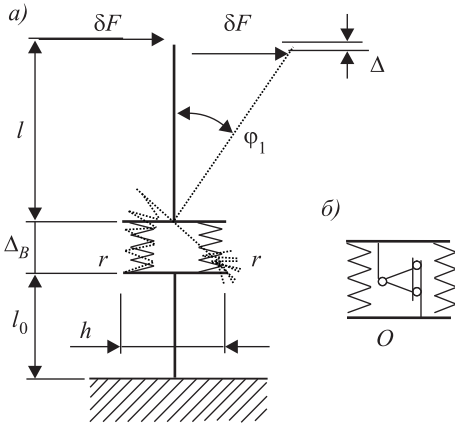


Рис. 1. Модель изгибаемой балки (а) и модель упругого шарнира (б)

Fig. 1. Model of a bent beam (a) and model of an elastic hinge (b)

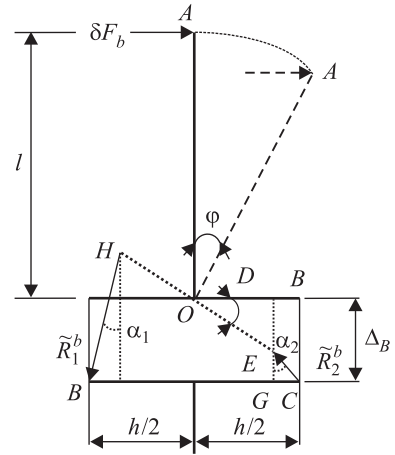


Рис. 2. Схема отклоненного состояния системы

Fig. 2. Diagram of the rejected state of the system

В случае действия вариации поперечной силы \$\delta F_b\$ стержень из начального положения отклонится на некоторый угол \$\varphi\$ в новое положение. При этом в пружинах возникнут реактивные силы \$\tilde{R}_1^b\$ и \$\tilde{R}_2^b\$, вертикальные проекции которых создадут неуравновешенное усилие \$\tilde{R} = \tilde{R}_1^b - \tilde{R}_2^b\$. Введя безразмерные величины

$$R_i^b = \tilde{R}_i^b / rh, \quad \zeta = \Delta_B / h, \quad (1)$$

где \$r\$ – жесткость упругой пружины, получим неуравновешенную величину реакции в виде

$$R = R_1^b - R_2^b = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{(2\sin^2(\varphi/2))^2 + (2\zeta + \sin\varphi)^2} - 2\zeta) \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1}} - (2\zeta - \sqrt{(2\sin^2(\varphi/2))^2 + (2\zeta - \sin\varphi)^2}) \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2}} \right]. \quad (2)$$

Продольное перемещение вдоль первоначального направления оси стержня определится разностью проекций удлинения и укорочения пружин на это направление

$$\delta = \delta_1 \cos\alpha_1 - \delta_2 \cos\alpha_2. \quad (3)$$

На первом этапе при отклонении стержня на угол \$\varphi\$ происходит возрастание неуравновешенной продольной реакции \$\tilde{R}\$. При достижении предельного угла отклонения вследствие вращения стержня из начального положения в отклоненное модель стержня в какой-то момент перейдет в состояние безразличного равновесия (самонапряжения). Пренебрежимо малое возмущение заставит конструкцию расходовать накопленную потенциальную энергию деформации на поступательное перемещение системы вдоль оси стержня.

На рис. 3 показан график изменения перемещений и неуравновешенной реакции пружин в зависимости от угла отклонения изгибаемой системы.

Графики, показанные на рис. 3 и далее, будут незначительно меняться в зависимости от изменения параметра ζ . Скачки значений хорошо просматриваются в пределах $0,01 \leq \zeta \leq 0,1$. При этом критические углы изменяются в пределах $0,05 \leq \varphi \leq 0,2$ рад. Выбранные значения соответствуют параметрам реальных изгибаемых систем (балок).

По мере возрастания и убывания параметра ζ кривая перемещений (неуравновешенных реакций) сглаживается, а на краях участков проявляются максимальные и минимальные значения функции.

Потенциальная энергия, накопленная в виде работы момента на углах отклонения от начального положения равновесия, запишется как

$$W_{in}^M = 2rh^2(\cos(\varphi/2) - 1) = -4rh^2\sin^2(\varphi/4). \quad (4)$$

Возможная работа неуравновешенной реакции \tilde{R} на соответствующих перемещениях δ может быть представлена в виде

$$W_{in}^R = \tilde{R}\delta = \frac{r\delta^2}{2}. \quad (5)$$

Суммарная потенциальная энергия системы

$$\Delta U = W_{in}^M + W_{in}^R. \quad (6)$$

Выражение изменения безразмерной потенциальной энергии в зависимости от угла отклонения

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U} = & 2(\cos(\varphi/2) - 1) + \frac{1}{8} \left[\sqrt{(2\sin^2(\varphi/2))^2 + (2\zeta + \sin\varphi)^2} - 2\zeta \right] \times \\ & \times \frac{\sin\varphi + 2\zeta}{\sqrt{4\zeta(\zeta + \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi)}} - (2\zeta - \sqrt{(2\sin^2(\varphi/2))^2 + (2\zeta - \sin\varphi)^2}) \times \\ & \times \frac{2\zeta - \sin\varphi}{\sqrt{4\zeta(\zeta - \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi)}} \Big]^2. \quad (7) \end{aligned}$$

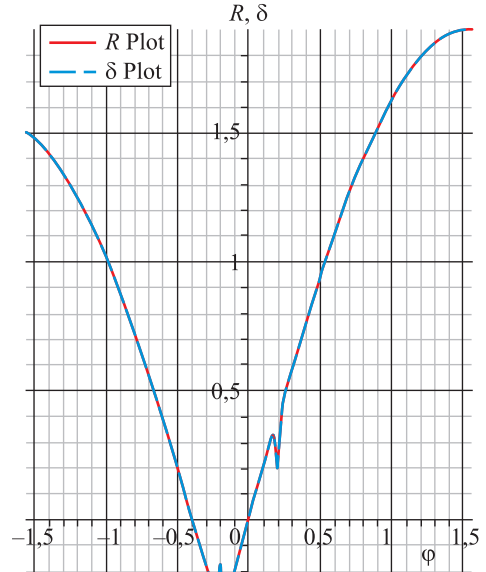


Рис. 3. Изменение перемещений и неуравновешенной продольной реакции пружин в зависимости от угла отклонения системы φ при отношении $\zeta = 0,1$

Fig. 3. Change of displacements and unbalanced longitudinal reaction of springs depending on the angle of deviation of the φ system at the ratio $\zeta = 0,1$

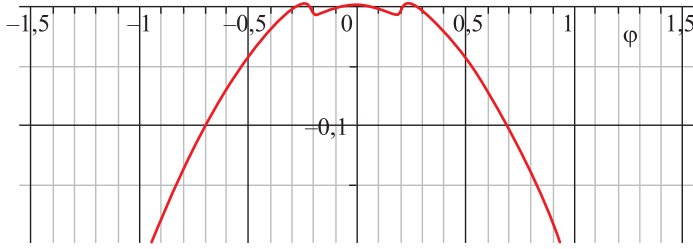


Рис. 4. Изменение потенциальной энергии системы при изгибе стержня ($\zeta=0,1$)

Fig. 4. Change in the potential energy of the system during bending of the rod ($\zeta=0,1$)

Здесь

$$\Delta \bar{U} = \frac{\Delta U}{rh^2}. \quad (8)$$

На рис. 4 показан график изменения потенциальной энергии системы в зависимости от угла отклонения системы.

Первая производная внутренней потенциальной энергии по углу отклонения изгибаемой системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \bar{U}}{d\varphi} = & -\sin(\varphi/2) + ((0,5\sqrt{4\sin^2(\varphi/2) + (2\xi + \sin\varphi)^2} - \xi) \times \\ & \times 2(\xi + \sin\varphi)) / \sqrt{4\xi(\xi + \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi)} - \\ & - ((-0,5\sqrt{4\sin^2(\varphi/2) + (2\xi - \sin\varphi)^2} + \xi) 2(\xi - \sin\varphi) / \\ & / \sqrt{(4\xi(\xi - \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi))} ((0,25(8\sin^3(\varphi/2)\cos(\varphi/2) + \\ & + 2(2\xi + \sin\varphi)\cos\varphi)(2\xi + \sin\varphi)) / (\sqrt{(4\xi(\xi + \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi))} \times \\ & \times \sqrt{4\sin^4(\varphi/2) + (2\xi + \sin\varphi)^2} + (0,5\sqrt{4\sin^2(\varphi/2) + (2\xi + \sin\varphi)^2} - \\ & - \xi) \times \cos\varphi / \sqrt{4\xi(\xi + \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi)} - \\ & - 0,5((0,5\sqrt{4\sin^4(\varphi/2) + (2\xi + \sin\varphi)^2} - \xi)(2\xi + \sin\varphi)(4\xi\cos\varphi + \\ & + 2\sin\varphi)) / (4\xi(\xi + \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi))^{3/2} + (0,25(8\sin^3(\varphi/2) \times \\ & \times \cos(\varphi/2) - 2(2\xi - \sin\varphi)\cos\varphi)(2\xi - \sin\varphi) / \\ & / \sqrt{4\sin^4(\varphi/2) + (2\xi - \sin\varphi)^2} \sqrt{4\xi(\xi - \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi)} + \\ & + (-0,5\sqrt{4\sin^2(\varphi/2) + (2\xi - \sin\varphi)^2} + \xi)\cos\varphi / \\ & / \sqrt{(4\xi(\xi - \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi))} + 0,5(-0,5\sqrt{4\sin^2(\varphi/2) + (2\xi - \sin\varphi)^2} + \\ & + \xi)(2\xi - \sin\varphi)(-4\xi\cos\varphi + 2\sin\varphi) / (4\xi(\xi + \sin\varphi) + 2(1 - \cos\varphi))^{3/2}). \end{aligned} \quad (9)$$

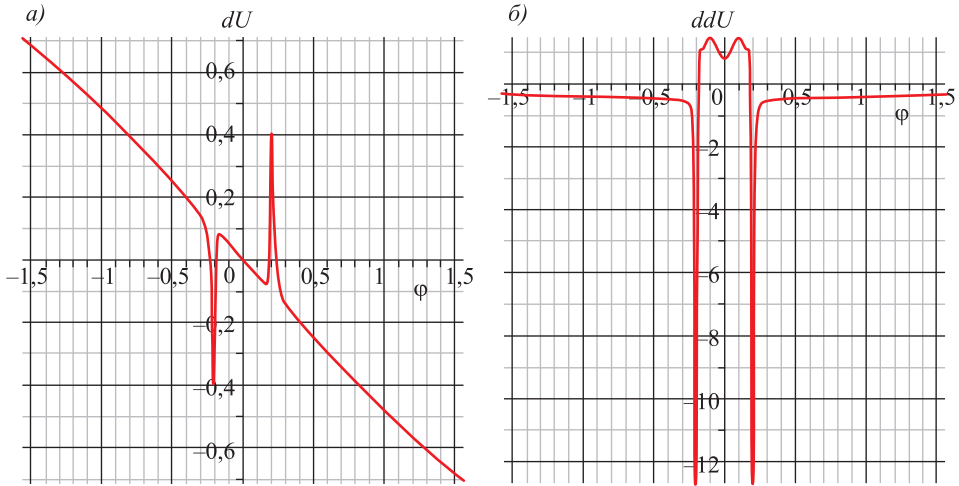


Рис. 5. Изменение первой производной от потенциальной энергии по углу отклонения от начального равновесного состояния при изгибе стержня ($\zeta = 0,1$) (а); график изменения второй производной от потенциальной энергии деформации системы по углу отклонения от начального состояния равновесия при изгибе стержня ($\zeta = 0,1$) (б)
 Fig. 5. Change of the first derivative of the potential energy by the angle of deviation from the initial equilibrium state during bending of the rod ($\zeta = 0,1$) (a); graph of the change in the second derivative of the potential energy of deformation of the system by the angle of deviation from the initial equilibrium state during bending the rod ($\zeta = 0,1$) (b)

Графики изменения первой и второй производной от потенциальной энергии по углу отклонения системы от начального положения равновесия приведены на рис. 5.

Как видим, точки стационарности системы приходятся на угол отклонения $\varphi = 0,2 \text{ рад} = 11,46^\circ$ (кроме угла в начальном, недеформированном состоянии).

Значение критической силы можно найти из условия равенства действительной работы вариации внешней силы

$$W_{ex} = \frac{\delta F_b l}{2} \sin \varphi \quad (10)$$

и накопленной внутренней энергии момента внутренних усилий (4).

Условие стационарности полной энергии деформации системы

$$\frac{d(\Delta W)}{d\varphi} = \frac{\delta F_b l}{2} \cos \varphi - rh^2 \sin \frac{\varphi}{2} = 0. \quad (11)$$

Откуда критическая величина вариации изгибающей силы

$$\delta F_b = \frac{2rh^2}{l} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}. \quad (12)$$

Подставляя значение критического угла отклонения $\varphi_b = 0,2 \text{ рад}$, получаем величину вариации критической силы $\delta F_b = 0,2037 \frac{rh^2}{l}$.

В линейной постановке для бесконечно малых величин углов выражение внутренней энергии системы имеет вид

$$\Delta \bar{U} = -rh^2 \varphi_b^2 / 4 + \frac{1}{8} \left[\left(\sqrt{\varphi_b^4 / 2 + (2\xi + \varphi_b)^2} - 2\xi \right) \frac{\varphi_b + 2\xi}{\sqrt{4\xi(\xi + \varphi_b) + \varphi_b^2}} - \left(2\xi - \sqrt{\varphi_b^4 / 2 + (2\xi - \varphi_b)^2} \right) \frac{2\xi - \varphi_b}{\sqrt{4\xi(\xi - \varphi_b) + \varphi_b^2}} \right]^2. \quad (13)$$

Первая производная от внутренней потенциальной энергии по углу отклонения системы φ_b запишется как

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}}{d\varphi} = & -0,5\varphi + \frac{0,0625(4\varphi^3 + 8\varphi)(2\xi + \varphi)}{\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + 8\xi}\sqrt{(2\xi + \varphi)^2}} + \\ & + \frac{0,125\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + 8\xi} - \xi}{\sqrt{(2\xi + \varphi)^2}} - \\ & - \frac{0,25}{(2\xi + \varphi)^3} (0,25\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + 8\xi} - \xi)(2\xi + \varphi)(4\xi + 2\varphi) + \\ & + \frac{0,0625(4\varphi^3 - 8\varphi)(2\xi - \varphi)}{\sqrt{\varphi^4 - 4\varphi^2 + 8\xi}\sqrt{(-2\xi + \varphi)^2}} + \frac{0,125\sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2 + 8\xi} + \xi}{\sqrt{(-2\xi + \varphi)^2}} + \\ & + \frac{0,25}{(-2\xi + \varphi)^3} (-0,25\sqrt{\varphi^4 - 4\varphi^2 + 8\xi} + \xi)(2\xi - \varphi)(-4\xi + 2\varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

Графики изменения внутренней потенциальной энергии и ее производной по углу отклонения показаны на рис. 6.

Несложно видеть, что критические углы отклонения совпадают в местах скачка энергии для линейной и нелинейной постановки задачи. По утверждению Л. Коллатца [20], точки ветвления в линейных и нелинейных задачах на собственные значения совпадают по значениям. Отличаются собственные функции, которые описывают критические состояния системы.

Полученные результаты позволяют утверждать, что моделирование

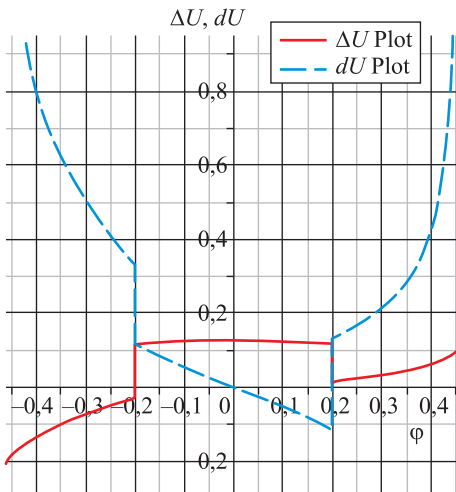


Рис. 6. Изменение внутренней потенциальной энергии и ее производной по углу отклонения при изгибе системы с одной степенью свободы ($\zeta = 0,1$)

Fig. 6. The change in the internal potential energy and its derivative in the angle of deflection when bending a system with one degree of freedom ($\zeta = 0,1$)

задачи изгиба балки упругой системой с одной степенью свободы подтверждает периодический и бифуркационный характер явления потери прочности при изгибе.

Применение подхода, основанного на критерии критических уровней энергии, позволяет находить критические параметры системы при изгибе аналогично тому, как это делается в задачах устойчивости.

Критерий критических уровней энергии позволяет ставить задачи прочности и устойчивости в единообразной постановке, утверждая возможность единой постановки и решения задач строительной механики.

Список источников

1. *Wu K., Xing Z.* Stability of imperfect prestressed stayed beam-columns under combined axial load and bending // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 245. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112891>
2. *Lanzoni L., Tarantino A.* Nonuniform bending theory of hyperelastic beams in finite elasticity // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021. Vol. 135. P. 12. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103765>
3. *Kim S., Lee Y.* Effects of shrinkage variation within beam depth and bending creep on flexural behavior of RC members // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 249. P. 10. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113315>
4. *Fu C., Yang X.* Bending of a viscoelastic Timoshenko cracked beam based on equivalent viscoelastic spring Models // *Advances in Civil Engineering*. 2021. P. 11. <https://doi.org/10.1155/2021/8663213>
5. *Türker H.T.* A modified beam theory for bending of eccentrically supported beams // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2020. P. 13. DOI: 10.1080/15397734.2020.1738246
6. *Oladejo K., Abu R., Bamiro O.* Model for deflection analysis in cantilever beam // *European Journal of Engineering and Technology Research*. 2018. Vol. 3, no. 12. P. 60–66. DOI: <https://doi.org/10.24018/ejers.2018.3.12.1004>
7. *Choi S., Kim Y.* Higher-order beam bending theory for static, free vibration, and buckling analysis of thin-walled rectangular hollow section beams // *Computers & Structures*. 2021. Vol. 248. P. 14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106494>
8. *Aliha M.R.M., Karimi H., Ghoreishi S.M.N.* Design and validation of simple bend beam specimen for covering the full range of I+II fracture modes // *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2022. Vol. 91. P. 12. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104425>
9. *Hazwani F., Todo M.* Deformation mechanism of porous composite sandwich beam for orthopaedical application under three-point bending // *Composite Structures*. 2021. P. 14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114983>
10. *Srikarun B., Songsuwan W., Wattanasakulpong N.* Linear and nonlinear static bending of sandwich beams with functionally graded porous core under different distributed loads // *Composite Structures*. 2021. Vol. 276. P. 11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114538>
11. *Zhao X., Wei L., Wen D., Zhu G., Yu Q., Ma Z.D.* Bending response and energy absorption of sandwich beams with novel auxetic honeycomb core // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 247. P. 13. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113204>
12. *Nguyen N., Nguyen T., Vo T.* A new two-variable shear deformation theory for bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded porous beams // *Composite Structures*. 2021. P. 14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.115095>
13. *Ржаницын А.П.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.: Госстройиздат, 1954. 283 с.

14. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт, 2001. 394 с.
15. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
16. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л. Дискретно-континуальные методы расчета сооружений. М.: Архитектура-С, 2010. 336 с.
17. Ступишин Л.Ю. Вариационный критерий критических уровней внутренней энергии деформируемого тела // Пром. и гражд. стр-во. 2011. № 8. С. 21–23.
18. Stupishin L. Comparative analysis of buckling criteria for engineering structures. Single-degree-of-freedom systems // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 201 P. 5. doi:10.1088/1757-899X/201/1/012020
19. Stupishin L.Yu., Moshkevich M.L. Comparative analysis of buckling criteria for engineering structures // Multi-degree system. 2018. Vol. 16, no. 1. P. 28–31.
20. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen. Leipzig, 1963. 503 p.

References

1. Wu K., Xing Z. Stability of imperfect prestressed stayed beam-columns under combined axial load and bending. *Engineering Structures*. 2021; (245). <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112891>
2. Lanzoni L., Tarantino A. Nonuniform bending theory of hyperelastic beams in finite elasticity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021; (135): 12. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103765>
3. Kim S., Lee Y. Effects of shrinkage variation within beam depth and bending creep on flexural behavior of RC members. *Engineering Structures*. 2021; (249): 10. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113315>
4. Fu C., Yang X. Bending of a viscoelastic Timoshenko cracked beam based on equivalent viscoelastic spring models. *Advances in Civil Engineering*. 2021. P. 11. <https://doi.org/10.1155/2021/8663213>
5. Türker H.T. A modified beam theory for bending of eccentrically supported beams. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2020. P. 13. DOI: 10.1080/15397734.2020.1738246
6. Oladejo K., Abu R., Bamiro O. Model for deflection analysis in cantilever beam. *European Journal of Engineering and Technology Research*. 2018; 3(12): 60–66. DOI:<https://doi.org/10.24018/ejers.2018.3.12.1004>
7. Choi S., Kim Y. Higher-order beam bending theory for static, free vibration, and buckling analysis of thin-walled rectangular hollow section beams. *Computers & Structures*. 2021; (248): 14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2021.106494>
8. Aliha M.R.M., Karimi H., Ghoreishi S.M.N. Design and validation of simple bend beam specimen for covering the full range of I+II fracture modes. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 2022; (91): 12. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104425>
9. Hazwani F., Todo M. Deformation mechanism of porous composite sandwich beam for orthopaedical application under three-point bending. *Composite Structures*. 2021. P. 14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114983>
10. Srikarun B., Songsuwan W., Wattanasakulpong N. Linear and nonlinear static bending of sandwich beams with functionally graded porous core under different distributed loads. *Composite Structures*. 2021; (276): 11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114538>
11. Zhao X., Wei L., Wen D., Zhu G., Yu Q., Ma Z.D. Bending response and energy absorption of sandwich beams with novel auxetic honeycomb core. *Engineering Structures*. 2021; (247): 13. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113204>

12. Nguyen N., Nguyen T., Vo T. A new two-variable shear deformation theory for bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded porous beams. *Composite Structures*. 2021. P. 14. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.115095>
13. Rzhantsyn A.R. Calculation of structures taking into account the plastic properties of materials. Moscow, 1954. 283 p. (In Russ.).
14. Gorodetskiy A.S., Evzerov I.D. Computer models of structures. Kiev, 2001. 394 p. (In Russ.).
15. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Calculation models of structures and the possibility of their analysis. Moscow, 2007. 600 p. (In Russ.).
16. Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N., Mozgaleva M.L. Discrete-Continuous Methods for Structural Analysis. Moscow, 2010. 336 p. (In Russ.).
17. Stupishin L.Yu. Variational criterion for critical levels of internal energy of a deformed body. *Promyshlennoye i grazhdanskoye stroitel'stvo = Industrial and civil construction*. 2011; (8): 21–23. (In Russ.).
18. Stupishin L. Comparative analysis of buckling criteria for engineering structures. Single-degree-of-freedom systems. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017; (201): 5. doi:10.1088/1757-899X/201/1/012020
19. Stupishin L.Yu., Moshkevich M.L. Comparative analysis of buckling criteria for engineering structures. *Multi-degree system*. 2018; 16 (1): 28–31.
20. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen. Leipzig, 1963. 503 p.

Информация об авторах

Л.Ю. Ступишин – кандидат технических наук, профессор

В.Л. Мондрус – член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор

М.Л. Мошкевич – кандидат экономических наук, доцент

Information about the authors

L.Yu. Stupishin – PhD, Professor

V.L. Mondrus – Corr. Mem. RAACS, DSc, Professor

M.L. Moshkevich – PhD, Ass. Professor

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 21.09.2021
Одобрена после рецензирования 22.10.2021
Принята к публикации 28.10.2021

The article was submitted 21.09.2021
Approved after reviewing 22.10.2021
Accepted for publication 28.10.2021