
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

SECTION OF SCIENTIFIC METHODOLOGY

Известия вузов. Строительство. 2022. № 1. С. 105–111.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2022; (1): 105–111.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 697.1:596

DOI: 10.32683/0536-1052-2022-757-1-105-111

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ

Олег Дмитриевич Самарин

Национальный исследовательский Московский государственный
строительный университет, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрены различные подходы к расчету распространения тепловых возмущений в конструкциях, имеющих форму пустотелого цилиндра с большой толщиной стенки. Приведен вывод формулы, описывающей температурное поле от нестационарного линейного источника в массиве материала, в виде бесконечного ряда по степеням безразмерной радиальной координаты с использованием метода автомодельных решений. Результаты вычислений по указанному уравнению сопоставлены с зависимостью, ранее полученной автором с помощью конечно-разностной аппроксимации данных численного решения исходного дифференциального уравнения Фурье для случая цилиндрической симметрии. Показано, что при больших значениях безразмерной радиальной координаты, соответствующих малым моментам времени, сравниваемые варианты эквивалентны.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, цилиндр, источник, критерий Фурье, автомодельное решение

Для цитирования: Самарин О.Д. Сравнение методов расчета нестационарного температурного поля в толстостенных цилиндрических конструкциях // Известия вузов. Строительство. 2022. № 1. С. 105–111. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-757-1-105-111.

Original article

COMPARISON OF METHODS FOR CALCULATING THE NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN THICK-WALLED CYLINDRICAL STRUCTURES

Oleg D. Samarin

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

Abstract. Various approaches to the calculation of the propagation of thermal disturbances in structures having the shape of a hollow cylinder with a large wall thickness are considered. A formula describing the temperature field from a nonstationary linear

source in a material array is derived in the form of an infinite series in degrees of a dimensionless radial coordinate using the method of self-similar solutions. The results of calculations for this equation are compared with the dependence previously obtained by the author using a finite-difference approximation of the data for the numerical solution of the original Fourier differential equation for the case of cylindrical symmetry. It is shown that for large values of the dimensionless radial coordinate corresponding to small moments of time, the compared variants are equivalent.

Keywords: temperature, thermal conductivity, cylinder, source, Fourier criterion, self-similar solution

For citation: Samarin O.D. Comparison of methods for calculating the non-stationary temperature field in thick-walled cylindrical structures. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2022; (1): 105–111. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2022-757-1-105-111

Задача о расчете нестационарного распределения температуры в цилиндрических конструкциях с толстыми стенками, например, в дымовых трубах, и в сплошных массивах вокруг линейных источников теплоты в виде трубопроводов систем отопления и теплоснабжения, греющих кабелей и других аналогичных устройств, является актуальной, так как связана с безопасностью функционирования соответствующего оборудования и обеспечением комфортности жизненной среды человека. Особое значение данные обстоятельства приобретают в условиях действия закона РФ «Технический регламент “О безопасности зданий и сооружений”» № 384-ФЗ от 30.12.2009 (с последующими изменениями). Различные варианты решений рассматриваемой задачи приводятся, в частности, в работах [1–4] с использованием как аналитических, так и численных методов, в том числе в массиве грунта [3] и для решения обратной задачи по определению теплофизических параметров материала [1, 4], хотя полученные результаты во многом отличаются достаточной сложностью и с трудом применимы для использования в инженерной практике. Ряд публикаций, например, [5, 6], имеют более общий характер и касаются нестационарного теплового режима помещений и инженерных систем в целом, но также сложны для инженерного применения.

Рассмотрим один из наиболее характерных случаев расчета нестационарного температурного поля в условиях радиальной симметрии, а именно для толстостенного полого цилиндра. Для удобства введем параметр θ – относительную безразмерную температуру, которую можно определить следующим образом

$$\theta = \frac{t - t_{\text{н}}}{t_{\text{в}} - t_{\text{н}}}. \quad (1)$$

Здесь $t_{\text{н}}$ и $t_{\text{в}}$ – температура воздуха соответственно с внутренней и наружной стороны цилиндрической стенки, К. В работе [7] для θ в зависимости от времени τ , с, с момента начала теплового возмущения приводится следующее выражение в виде ряда (с некоторыми изменениями в обозначениях)

$$\theta = C \left(C_1 - \ln(x) + x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \frac{x^4}{4 \cdot 4!} \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n \cdot n!} + \dots \right), \quad (2)$$

где C – константа нормировки;

$C_1 = -0,5772$ – постоянная Эйлера;

$x = \frac{r^2}{4a\tau}$ – безразмерный параметр, равный, очевидно, $\frac{1}{4Fo}$, где $Fo = \frac{a\tau}{r^2}$ – кри-

терий Фурье, отнесенный к текущей радиальной координате r , м, показывающей расстояние от оси цилиндра до рассматриваемой точки;

$a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности материала массива цилинд-

ра, м²/с;

λ – его теплопроводность, Вт/(м · К);

c и ρ – удельная теплоемкость, Дж/(кг · К), и плотность, кг/м³.

Данная зависимость получена в [7] методом источников, а именно с помощью интегрирования фундаментального решения при мгновенном выделении некоторого количества теплоты в одной точке, однако такой подход недостаточно наглядный. Поэтому из методических соображений попытаемся найти ее непосредственно, исходя из дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности, которое для случая цилиндрической симметрии записывается в следующем виде [7–8]

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial \theta}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right]. \quad (3)$$

Результат в этом случае будет показывать текущее отклонение температурного поля от стационарного, определяемого геометрией системы и мощностью источников и стоков теплоты. Из общих физических соображений и исходя из аналогии с одномерным случаем, сделаем предположение, что $\theta = f(z)$, где $z = \frac{r}{\sqrt{a\tau}}$ – некоторый безразмерный параметр, имеющий смысл

относительной радиальной координаты. Это означает, что соответствующее решение будет автомодельным. Тогда уравнение (3) можно привести к виду

$$\frac{df}{dz} \left(1 + \frac{z^2}{2} \right) + z \frac{d^2 f}{dz^2} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно f , что подтверждает выдвинутую гипотезу автомодельности. Порядок уравнения, очевидно, можно понизить, полагая

$F(z) = \frac{df}{dz}$, откуда имеем

$$\frac{dF}{dz} + \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{2} \right) F = 0. \quad (5)$$

После разделения переменных и интегрирования находим

$$F(z) = C \exp \left(-\frac{z^2}{4} \right) / z, \quad (6)$$

где C – произвольная постоянная, обозначенная в (2) как константа нормировки. Отсюда, делая еще одну подстановку $x = \frac{z^2}{4}$, окончательно выпишем

ваем решение в виде (2), поскольку интеграл от (6) в элементарных функциях не выражается.

Для удобства постоянная C_1 , образующаяся при вторичном интегрировании, помещена в скобки, принципиального значения это не имеет. Ее величину проще всего определить, исходя из асимптотического поведения (2), а именно, на границе фронта распространения температурной волны, т.е. при $r = 3,75\sqrt{a\tau}$, что соответствует $x = 3,5$, значение θ должно равняться нулю, откуда и получаем $C_1 = -0,5772$. Что касается первой постоянной C , ее можно найти, переходя к другому предельному случаю, а именно $\tau \rightarrow \infty$, т.е. $x \rightarrow 0$, что означает выход на стационарный режим. Тогда оказывается, что $C = \frac{1}{2\ln(R/r_0)}$, где R и r_0 – соответственно наружный и внутренний радиусы цилиндрической конструкции, м.

В работе [9] в результате аппроксимации результатов численного решения было получено выражение, справедливое для полого цилиндра в пределах глубины проникновения температурной волны Δ , м

$$\theta = \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right)^2 = \left(1 - \frac{\delta}{k\sqrt{a\tau}}\right)^2 = \left(1 - \frac{\delta}{k\sqrt{Fo_\delta}}\right)^2. \quad (7)$$

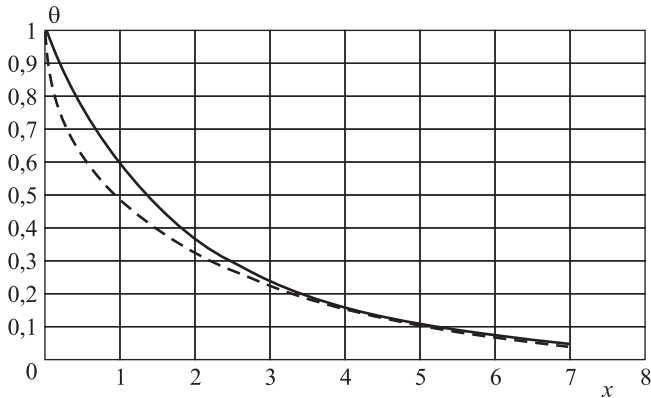
В данном случае $\Delta = r - r_0$; $Fo_\delta = \frac{a\tau}{\delta^2}$ – критерий Фурье, отнесенный к текущему расстоянию δ , параметр $k = 3,75$ был подобран, исходя из наилучшего совпадения данных численного расчета и формулы (7). Кроме того, в указанной публикации было проведено сопоставление (7) и (2), но это было сделано для конкретного примера с определенными геометрическими размерами рассматриваемой области и теплофизическими параметрами используемого материала. Однако представляется целесообразным выполнить такое сравнение в общем виде, чтобы доказать эквивалентность рассматриваемых зависимостей для любых случаев или, по крайней мере, в некоторой области изменения исходных данных.

В этом случае нужно иметь в виду, что, поскольку решение (2) относится к линейному источнику, диаметром которого можно пренебречь по сравнению с размерами исследуемой области, для перехода к полному цилиндру необходимо найти разность безразмерных температур, даваемых рядом (2), вычисленных при текущей величине r и для значения r_0 .

Очевидно, из $x = \frac{r^2}{4a\tau}$ следует, что $\delta = r - r_0 = 2\sqrt{a\tau x} - 2\sqrt{a\tau x_0}$, где x_0 вычисляется при $r = r_0$, откуда окончательно выражение (7) для возможности сопоставления с (2) принимает вид

$$\theta = \left(1 - \frac{2}{k}[\sqrt{x} - \sqrt{x_0}]\right)^2. \quad (8)$$

Так как в [9] процесс рассматривался для относительно малых моментов времени, отсюда следует, что наилучшее совпадение между (2) и (8) должно иметь место при больших x . На рисунке сплошной линией показан график



Зависимость безразмерной температуры θ от параметра x для полого цилиндра

Dependence of the dimensionless temperature θ on the parameter x for a hollow cylinder

для θ , рассчитанный по уравнению (2) в случае, когда r_0 составляет $\frac{1}{2}$ от внешнего радиуса цилиндра R , как это было принято в [9]. Пунктир изображает зависимость, соответствующую формуле (8), но при $k = 3,3$. Заметим, что это не вполне совпадает с $k = 3,6$, приводимым в [7] и некоторых других источниках для случая распространения температурной волны в плоской стенке, а также с найденным в [9] $k = 3,75$.

Однако в назначении величины k всегда имеется некоторая неопределенность, поскольку при этом необходимо условиться, какому именно минимальному уровню θ отвечает принятое k , так как по свойству уравнения (2) оказывается, что $\theta \rightarrow 0$ только при $x \rightarrow \infty$. Тем не менее все эти результаты оказываются достаточно близкими, откуда можно сделать вывод, что в действительности сделанное предположение о характере изменения глубины проникновения температурной волны с течением времени справедливо и в условиях цилиндрической симметрии, а обнаруженное несовпадение, по-видимому, объясняется погрешностью использованной конечно-разностной схемы и аппроксимационным характером зависимостей (7)–(8).

Нетрудно заметить, что при $x > 2,5$ оба решения действительно начинают совпадать, а некоторое расхождение при еще больших x вызвано способом построения выражений (7)–(8), которые предусматривают точное равенство $\theta = 0$ при $\delta = \Delta$.

Заключение. Показана справедливость найденного численными методами в работе [9] приближенного решения для расчета температурного поля при скачкообразном тепловом воздействии в толстостенных цилиндрических конструкциях с помощью сопоставления этого решения с точной теоретической зависимостью.

Отмечено, что достигнутые результаты не содержат в явном виде теплофизических характеристик применяемых материалов, поэтому универсальны и не привязаны к какому-либо конкретному примеру конструкции, но в то же время полученная форма приближенной зависимости позволяет использовать ее в инженерных расчетах без привлечения программных средств для ЭВМ.

Подтверждено, что наилучшее совпадение приближенного и точного решения наблюдается при малых значениях безразмерного времени, т.е. в начальный период после температурного возмущения.

Список источников

1. *Podledneva N.A., Krasnov V.A., Magomadov P.S.* Определение коэффициентов теплопроводности и температуропроводности за один опыт методом линейного источника теплоты постоянной мощности // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. 2013. № 2. С. 50–55.
2. *Елисеев В.Н., Товстоног В.А., Боровкова Т.В.* Алгоритм решения обобщенной задачи нестационарной теплопроводности в телах простой геометрической формы // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 1. С. 112–128.
3. *Vasilyev G.P., Gornov V.F., Konstantinov P.I., Kolesova M.V., Korneva I.A.* Analysis of ground temperature variations, on the basis of years-long measurements // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 4. P. 62–72.
4. *Ozturk A.* Overall heat transfer coefficient of functionally graded hollow cylinder // Solid State Phenomena. 2017. Vol. 267 SSP. P. 177–181.
5. *Latif M., Nasir A.* Decentralized stochastic control for building energy and comfort management // Journal of Building Engineering. 2019. Vol. 24. P. 100739.
6. *Serale G., Capozzoli A., Fiorentini M., Bernardini D., Bemporad A.* Model predictive control (MPC) for enhancing building and HVAC system energy efficiency: problem formulation, applications and opportunities // Energies. 2018. Vol. 11. No. 3. P. 631.
7. *Carslaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of heat in solids. Oxford University Press, USA, 1986. 520 p.
8. *Богословский В.Н.* Строительная теплофизика. 3-е изд. СПб.: Изд-во «АВОК СЕВЕРО-ЗАПАД», 2006. 400 с.
9. *Samarin O.D.* The temperature waves motion in hollow thick-walled cylinder // Magazine of civil engineering. 2018. No. 2. P. 161–168.

References

1. *Podledneva N.A., Krasnov V.A., Magomadov R.S.* Determination of coefficients of heat conductivity and heat diffusivity for one experience by a method of a linear source of heat of constant power. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Herald of Astrakhan State Technical University*. 2013; (2): 50–55. (In Russ.).
2. *Eliseev V.N., Tovstonog V.A., Borovkova T.V.* Solution algorithm of generalized non-stationary heat conduction problem in the bodies of simple geometric shapes. *Vestnik MGTU imeni N.E. Bauman = Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.* 2017; (1): 112–128. (In Russ.).
3. *Vasilyev G.P., Gornov V.F., Konstantinov P.I., Kolesova M.V., Korneva I.A.* Analysis of ground temperature variations, on the basis of years-long measurements. *Magazine of Civil Engineering*. 2017; (4): 62–72.
4. *Ozturk A.* Overall heat transfer coefficient of functionally graded hollow cylinder. *Solid State Phenomena*. 2017; (267 SSP): 177–181.
5. *Latif M., Nasir A.* Decentralized stochastic control for building energy and comfort management. *Journal of Building Engineering*. 2019; (24): 100739.
6. *Serale G., Capozzoli A., Fiorentini M., Bernardini D., Bemporad A.* Model predictive control (MPC) for enhancing building and HVAC system energy efficiency: problem formulation, applications and opportunities. *Energies*. 2018; 11(3): 631.
7. *Carslaw H.S., Jaeger J.C.* Conduction of heat in solids. Oxford University Press, USA, 1986. 520 p.

8. *Bogoslovskiy V.N.* Building thermal physics. 3rd ed. St. Petersburg, 2006. 400 p. (In Russ.).
9. *Samarin O.D.* The temperature waves motion in hollow thick-walled cylinder. *Magazine of civil engineering*. 2018; (2): 161–168.

Информация об авторе

О.Д. Самарин – кандидат технических наук, доцент

Information about the author

O.D. Samarin – PhD, Ass. Professor

Статья поступила в редакцию 15.12.2021
Одобрена после рецензирования 15.01.2022
Принята к публикации 22.01.2022

The article was submitted 15.12.2021
Approved after reviewing 15.01.2022
Accepted for publication 22.01.2022