

---

## НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

---

## SECTION OF SCIENTIFIC METHODOLOGY

Известия вузов. Строительство. 2021. № 11. С. 120–133.

ISSN 0536-1052

News of Higher Educational Institutions. Construction. 2021; (11): 120–133.

ISSN 0536-1052

Научная статья

УДК 539.319: 539.219.2: 539.4

DOI: 10.32683/0536-1052-2021-755-11-120-133

### О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Александр Анатольевич Трещев

Тульский государственный университет, Тула, Россия, [taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена постановка задачи об исследовании концентрации напряжений в ортотропных композитных материалах, проявляющих деформационную анизотропию. Конкретная задача анализируется на примере плоского напряженного состояния пластины, имеющей конечные размеры, а в качестве концентратора – круговое отверстие. Пластина загружается по контуру равномерно распределенными растягивающими или сжимающими усилиями. Для определения связей тензоров деформаций и напряжений композитных материалов использовался феноменологический подход, базирующийся на потенциале деформаций, сформулированном автором в тензорном нормированном пространстве, связанном с главными осями ортотропии. Константы принятого потенциала вычислялись через обобщенные механические характеристики материала, установленные по программам одноосных растяжения и сжатия в направлении главных материальных осей с привлечением опытов по чистому сдвигу в трех взаимно ортогональных главных плоскостях ортотропии. Расчетная модель концентрации напряжений на отверстии построена в рамках конечно-элементного метода. За основу были приняты треугольные симплекс элементы. В рамках расчетной модели получены распределения напряжений по всей области композитного материала в форме пластины. Рассмотрены отдельные результаты по расчету напряжений, которые сравнивались с параметрами напряженного состояния, вытекающими из классической теории деформирования ортотропного тела. Выполнена оценка особенностей возникающей концентрации напряжений для ортотропных композитных материалов.

**Ключевые слова:** композитный материал, концентратор напряжений, круглое отверстие, плоское напряженное состояние, деформационно-анизотропный материал, структурно-ортотропный материал, конечные элементы

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке гранта Правительства Тульской области для выполнения работ в сфере науки и техники, договор № ДС/284.

**Для цитирования:** Трещев А.А. О концентрации напряжений в композитных материалах // Известия вузов. Строительство. 2021. № 11. С. 120–133. DOI: 10.32683/0536-1052-2021-755-11-120-133.

Original article

## ON STRESS CONCENTRATION IN COMPOSITE MATERIALS

Alexander A. Treshchev

Tula State University, Tula, Russia, taa58@yandex.ru

**Abstract.** The formulation of the problem of studying the stress concentration in orthotropic composite materials exhibiting deformation anisotropy is considered. A specific problem is analyzed using the example of a flat stressed state of a plate having finite dimensions, and a circular hole as a concentrator. The plate is loaded along the contour by evenly distributed tensile or compressive forces. To determine the relationships of strain tensors and stresses of composite materials, a phenomenological approach was used based on the strain potential formulated by the author in a tensor normalized space associated with the main axes of orthotropy. The constants of the accepted potential were calculated using generalized mechanical characteristics of the material, established according to the programs of uniaxial stretching and compression in the direction of the main axes with the involvement of experiments on net shear in three mutually orthogonal main planes of orthotropy. The computational model of the stress concentration on the hole is constructed within the framework of the finite element method. Triangular simplex elements were taken as a basis. Within the framework of the computational model, stress distributions are obtained over the entire region of the composite material in the form of a plate. Separate results on the calculation of stresses are considered, which were compared with the parameters of the stress state arising from the classical theory of deformation of an orthotropic body. The features of the emerging stress concentration for orthotropic composite materials are evaluated.

**Keywords:** composite material, stress concentrator, round hole, flat stress state, deformationally anisotropic material, structurally orthotropic material, finite elements

**Acknowledgments:** the work was carried out with the support of a grant from the Government of the Tula region for work in the field of science and technology, contract no. DS/284.

**For citation:** Treshchev A.A. On stress concentration in composite materials. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2021; (11): 120–133. (In Russ.). DOI: 10.32683/0536-1052-2021-755-11-120-133.

Хотя термин «композитный материал» относительно новый, к композитам, т.е. составным, можно отнести абсолютное большинство искусственных конструкционных материалов. Однако, если в XIX–XX вв. обнаружение нового материала с отличающимися от традиционных физико-механическими свойствами приводило к разработке более совершенных конструкций, значительно меняющих техническую сторону жизни человечества, то в настоящее время высокопрочные композиты создаются целенаправленно для изготовления ответственных сооружений и деталей. Благодаря современному развитию науки и техники получен широкий спектр композитных материалов, особенностью которых являются противоречия их деформационно-прочностных свойств широко известным и всесторонне обоснованным теориям механики деформируемых тел. Среди подобных материалов часто встречаются анизотропные структуры разного класса. С другой стороны, широко известен ряд композитных материалов, деформационные и прочностные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния. Это свойство зачастую характеризуется как приобретаемая деформационная анизотропия.

Определенный класс композитных конструкционных материалов обладает и структурной, и деформационной анизотропией. Подобные проявления механических свойств явно противоречат классическим законам упругопластического деформирования как изотропных, так и анизотропных материалов, сформулированных в рамках гипотезы единых кривых «интенсивность напряжений – интенсивность деформаций» по соответствующим направлениям. Наличие совокупности двух видов анизотропии имеется у широкого круга полимерных, графитовых композитов, железобетона, боралюминия, стекло- и боропластиков.

Несмотря на высокие показатели прочности и жесткости композитов, как показывает опыт, в них уже на стадии изготовления или же на ранних стадиях эксплуатации появляются микро- и макроповреждения типа пор и трещин. Это объясняется тем, что адгезионные характеристики контактных зон разных по деформационно-прочностным свойствам составляющих материалов композитов – весьма уязвимая область с точки зрения проявления концентраций напряжений. В подобной ситуации возможны разные подходы к описанию состояний композитных материалов и конструкций, выполненных из них [1–6].

Помимо внутренних проблем, возникающих при деформировании конструкций из композитных материалов, во многих элементах изначально предусматриваются отверстия различной конфигурации [7, 8], в зоне которых дополнительно возникает концентрация напряжений. Она является одним из главных факторов, влияющих на прочность композитных элементов. В связи с этим исследование влияния концентраторов на напряженно-деформированное состояние (НДС) конструктивных элементов, даже выполненных из однокомпонентных однородных материалов, неоднократно привлекало внимание исследователей. В классических работах [9–13] для изотропных материалов были рассмотрены существенные всплески напряжений вблизи несплошностей. Еще большая концентрация напряжений обнаружена в конструкциях, выполненных из традиционных анизотропных материалов [14–18]. Однако при этом установлено, что качественная картина НДС анизотропных конструкций с концентраторами остается аналогичной изотропным. Иное воздействие оказывают концентраторы напряжений на картину НДС конструкций, механические характеристики которых зависят от соотношения компонентов тензора напряжений в конкретных точках даже в случае начально изотропных дилатирующих материалов [19, 20]. Подобные материалы принято называть разносопротивляющимися, чувствительными к виду напряженного состояния или деформационно-анизотропными. Еще большее влияние на количественные и качественные характеристики НДС оказывает наличие отверстий в конструкциях, выполненных из материалов, имеющих анизотропию двух видов – структурную и деформационную, а современные композитные элементы зачастую таковыми усложненными свойствами и обладают. Очевидно, что исследование концентрации напряжений в пластинах из композитных материалов, проявляющих анизотропию двух видов, является актуальной задачей механики.

Во многих математических моделях при исследовании возникающих концентраций напряжений объектами исследований являются пластины с отверстиями круговых и эллиптических очертаний. Для постановки задачи

о концентрации напряжений ниже рассмотрена тонкая пластина из композитного материала с отверстием радиусом  $r$ , толщиной  $h$  вдоль оси  $X_3$ , находящаяся в равновесии. Пластина имеет габаритные размеры  $2a$  и  $2b$  вдоль осей декартовой системы координат  $X_1$  и  $X_2$ , которая загружается в плоскости  $X_1X_2$  растягивающей или сжимающей равномерно распределенной по контуру  $\Gamma_2$  нагрузкой интенсивностью  $p_x$ , как показано на рис. 1. Материал пластины принят структурно-ортотропным, обладающим зависимостью жесткостных характеристик от вида напряженного состояния. Рост активной нагрузки – пропорциональный, а это дает возможность использовать уравнения связи тензоров деформаций и напряжений, вытекающие из потенциала деформаций, сформулированного в нормированном пространстве напряжений [21]

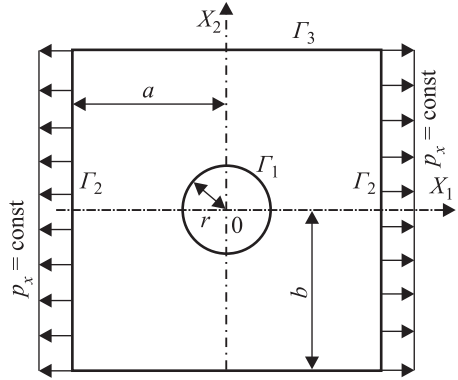


Рис. 1. Расчетная схема пластины  
Fig. 1. Design scheme of the plate

$$\begin{aligned}
 W = & 0,5(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11}^2 + 0,5(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22}^2 + \\
 & + 0,5(A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}^2 + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11}\sigma_{22} + \\
 & + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22}\sigma_{33} + [A_{3311} + B_{3311}(\alpha_{33} + \alpha_{11})]\sigma_{33}\sigma_{11} + \\
 & + 0,5(A_{1212}\tau_{12}^2 + A_{2323}\tau_{23}^2 + A_{3131}\tau_{31}^2),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\alpha_{ij} = \sigma_{ij}/S$  – компоненты тензора нормированных напряжений, ( $i, j = 1, 2, 3$ );  $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{13}^2}$  – норма тензорного пространства (все напряжения приняты в главных осях ортотропии материала);  $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{23}^2 + 2\alpha_{13}^2 = 1$ .

Процедура дифференцирования потенциала (1) по компонентам напряжений [21] приводит к уравнениям состояния для ортотропных разнородных материалов:

$$\begin{aligned}
 e_{11} = & \{(A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0,5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 - \\
 & - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\
 & + B_{1133}\alpha_{33}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) - B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\}\sigma_{11} + \\
 & + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{22} = & [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + \{(A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + \\
 & + 0,5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - \\
 & - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +B_{2233}\alpha_{33}(1-\alpha_{22}^2-\alpha_{22}\alpha_{33})-B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})\}\sigma_{22}+ \\
 & \quad +[A_{2233}+B_{2233}(\alpha_{22}+\alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{33} = & [A_{1133}+B_{1133}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\sigma_{11}+[A_{2233}+B_{2233}(\alpha_{22}+\alpha_{33})]\sigma_{22}+ \\
 & +\{(A_{3333}+B_{3333}\alpha_{33})+0,5[B_{3333}\alpha_{33}(1-\alpha_{33}^2)-B_{1111}\alpha_{11}^3]- \\
 & -B_{2222}\alpha_{22}^3-B_{1212}\alpha_{12}^3-B_{2323}\alpha_{23}^3-B_{1313}\alpha_{13}^3\}+B_{1133}\alpha_{11}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{11}\alpha_{33})+ \\
 & +B_{2233}\alpha_{22}(1-\alpha_{33}^2-\alpha_{22}\alpha_{33})-B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})\}\sigma_{33}; \quad (2) \\
 \gamma_{12} = & \{A_{1212}-(B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3)-2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+ \\
 & +B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\}\tau_{12}; \\
 \gamma_{23} = & \{A_{2323}-(B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3)-2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+ \\
 & +B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\}\tau_{23}; \\
 \gamma_{13} = & \{A_{1313}-(B_{1111}\alpha_{11}^3+B_{2222}\alpha_{22}^3+B_{3333}\alpha_{33}^3)-2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11}+\alpha_{22})+ \\
 & +B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22}+\alpha_{33})+B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11}+\alpha_{33})]\}\tau_{13}.
 \end{aligned}$$

Константы  $A_{ijkm}$ ,  $B_{ijkm}$ , фигурирующие в записи потенциала (1) и уравнений (2), определены [21] из одноосных опытов по осевым сжатию и растяжению вдоль главных осей структурной ортотропии и по сдвигу в главных структурных плоскостях анизотропии:  $A_{kkkk} = (1/E_k^+ + 1/E_k^-)/2$ ;  $A_{ijij} = -(v_{ij}^+/E_j^+ + v_{ij}^-/E_j^-)/2$ ;  $A_{ijij} = 1/G_{ij}$ ;  $B_{ijij} = -(v_{ij}^+/E_j^+ - v_{ij}^-/E_j^-)/2$ ;  $v_{ij}^+/E_j^+ = v_{ji}^+/E_i^+$ ;  $v_{ij}^-/E_j^- = v_{ji}^-/E_i^-$ , где  $E_k^\pm$ ,  $v_{ij}^\pm$ ,  $G_{ij}$  – модули упругости и коэффициенты поперечной деформации по главным осям ортотропии и модули сдвига в главных плоскостях (знак минус соответствует сжатию, плюс – растяжению).

Рассматривая расчетную схему пластины, можно утверждать, что она находится в плоском напряженном состоянии, когда  $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ . Тогда уравнения (2) упрощаются и сводятся к виду:

$$\begin{aligned}
 e_{11} = C_{1111}\sigma_{11} + C_{1122}\sigma_{22}; \quad e_{22} = C_{1122}\sigma_{11} + C_{2222}\sigma_{22}; \quad \gamma_{12} = C_{1212}\tau_{12}, \quad (3) \\
 \text{где} \quad C_{1111} = (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0,5[B_{1111}\alpha_{11}(1-\alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3] + \\
 + B_{1122}\alpha_{22}(1-\alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}); \quad \alpha_{11} = \sigma_{11}/S; \quad \alpha_{22} = \sigma_{22}/S; \\
 C_{2222} = (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + 0,5[B_{2222}\alpha_{22}(1-\alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3] + \\
 + B_{1122}\alpha_{11}(1-\alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}); \quad S = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\tau_{12}^2}; \\
 C_{1313} = A_{1313} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3) - 2B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \\
 C_{1122} = A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22}).
 \end{aligned}$$

Расчетную модель поставленной задачи предполагается сформулировать в форме плоской конечно-элементной модели с двумя степенями свобо-

ды в узле, в рамках которой уравнения состояния (3) необходимо представить в матричной форме

$$\{e\} = [C] \{\sigma\}, \quad (4)$$

где  $\{e\} = \{e_{11}e_{22}\gamma_{12}\}^T$  – вектор-столбец деформаций;  $[C]$  – матрица податливостей ортотропного материала, которые зависят от вида напряженного состояния;  $C_{11} = C_{1111}$ ;  $C_{12} = C_{21} = C_{1122}$ ;  $C_{22} = C_{2222}$ ;  $C_{33} = C_{1212}$ ;  $C_{13} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = 0$ ;  $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}\sigma_{22}\tau_{12}\}^T$  – вектор-столбец напряжений.

Разрешение уравнения (4) относительно вектора напряжений позволяет установить

$$\{\sigma\} = [D(\alpha_{ij})]\{e\},$$

где  $[D(\alpha_{ij})] = [C]^{-1}$  – матрица деформационных жесткостей материала, определяющихся видом напряженного состояния.

Ненулевые значения сохраняют только две составляющие вектора перемещений  $u_1 = u$  и  $u_2 = v$  в направлении осей  $X_1$  и  $X_2$ . Третья компонента перемещений  $u_3 = w$  вдоль оси  $X_3$  существует, но не входит в результирующие уравнения и имеет тривиальное значение, определяясь простейшим образом:  $w = e_{33}x_3$ , и далее не рассматривается.

Основные компоненты тензора малой деформации связаны с перемещениями уравнений Коши для плоского напряженного состояния:

$$e_{11} = u_{,1}; \quad e_{22} = v_{,2}; \quad \gamma_{12} = u_{,2} + v_{,1}. \quad (5)$$

Очевидно, несмотря на усложненные физические свойства материалов с двойной анизотропией, общие уравнения механики сохраняют свою значимость и справедливость. Поэтому в рамках рассматриваемой задачи уравнения равновесия при условном отсутствии объемных сил сохраняют традиционный для плоских задач вид [12]:

$$\sigma_{11,1} + \tau_{12,2} = 0; \quad \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \quad (6)$$

Статические граничные условия на контуре пластины формулируются также в традиционной форме:

$$p_{1v} = \sigma_{11}\cos(vx_1) + \tau_{12}\cos(vx_2); \quad p_{2v} = \sigma_{22}\cos(vx_2) + \tau_{12}\cos(vx_1), \quad (7)$$

где  $\cos(vx_k)$  – косинусы углов между положительной нормалью к площадке, к которой приложено внешнее усилие с составляющими проекциями  $p_{kv}$ , ( $k = 1, 2$ ) и координатными осями  $x_k$ .

Уравнение сплошности деформируемой среды в форме связи деформаций Сен-Венана имеет вид

$$e_{11,22} + e_{22,11} = \gamma_{12,12}. \quad (8)$$

Вся плоскость пластины, ограниченная ее контуром, разбивается на треугольные симплексные конечные элементы [19, 20, 22, 23]. В обозначенной контуром кругового отверстия зоне предполагаемой концентрации напряжений размеры конечных элементов существенно уменьшаются со сгущением сетки. Совокупность перемещений в любой точке конечного элемента

$u(x_1, x_2)$  и  $v(x_1, x_2)$  принято представлять через его узловые перемещения  $\{U\}$  матричным уравнением [19, 20, 22, 23]

$$\{u \ v\}^T = [N] \{U\}, \quad (9)$$

где  $\{U\} = \{u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k\}^T$ ;  $i, j, k$  – порядковые номера узлов конечного элемента.

По области принятого треугольного конечного элемента совокупность перемещений аппроксимируется известными полиномами первой степени вида [19, 20, 22, 23]:  $u = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2$ ;  $v = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_2$ . Тогда функции формы  $[N]$  можно определить в виде матрицы

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где  $N_i = (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) / (2\Delta)$ , ( $i \rightarrow j \rightarrow k$ );  $\Delta$  – площадь принятого треугольного элемента;  $a_i = x_{1j} x_{2k} - x_{1k} x_{2j}$ ;  $b_i = x_{1i} - x_{2k}$ ;  $c_i = x_{1k} - x_{2j}$ .

Уравнения Коши (5) с учетом аппроксимаций (9), (10) легко сводятся к зависимостям между деформациями в конечном элементе и его узловыми перемещениями

$$\{e\} = [B] \{U\}, \quad (11)$$

$$\text{где } [B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}; \quad 2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{vmatrix}.$$

Рассматриваемая форма метода конечных элементов формулируется в рамках вариационного принципа Лагранжа. При этом потенциальная энергия деформируемой области  $\Pi$  определяется разностью между внутренней энергией деформаций  $W$  и работой внешних усилий  $A$ , т.е.  $\Pi = W - A$ . Тогда приращение энергии деформаций конечного элемента объемом  $dV$  определится следующим образом:  $dW = \{e\}^T \{\sigma\} / 2$ . Если массовые силы рассматривать как нагрузку или вообще пренебречь ими, то работа поверхностных и сосредоточенных сил определится суммой

$$A = \{U\}^T \{P\} + \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS, \quad (12)$$

где  $\{P\}$  – вектор проекций на оси  $X_1$  и  $X_2$  узловых сил нагрузки;  $\{p\}$  – вектор проекций на оси  $X_1$  и  $X_2$  поверхностной нагрузки;  $S$  – размер границы внешнего контура конечного элемента.

Окончательно потенциальная энергия треугольного конечного элемента представляется следующим образом:

$$\Pi = 1/2 \int_V \{e\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\} - \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS, \quad (13)$$

а с учетом зависимости (12) и уравнений (6) – в виде

$$\Pi = 1/2 \int_V \{U\}^T [B]^T [D(\sigma)] [B] \{U\} dV - \{U\}^T \{P\} - \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS. \quad (14)$$

Проведя минимизацию функционала (14) по вектору  $\{U\}$  и приведя поверхностную распределенную нагрузку к узловым сосредоточенным силам, для плоского напряженного состояния треугольного конечного элемента толщиной  $h$  получим итоговое уравнение

$$[K]\{U\} = \{P\}, \quad (15)$$

где  $[K] = [B]^T [D(\sigma)][B] h\Delta$  – матрица жесткости треугольного элемента.

Очевидно, что векторы  $\{U\}$ ,  $\{P\}$  в уравнении (15) являются векторами узловых неизвестных перемещений и узловой нагрузки в расчетной сетке конечных элементов пластины. Построение глобальной матрицы жесткости КЭ-модели определяется путем сложения матриц жесткости всех конечных элементов полного расчетного ансамбля. В результате с учетом граничных условий приходим к системе алгебраических уравнений, решение которой осуществлялось методом Гаусса. Однако ввиду наличия нелинейных уравнений состояния (3)–(5) ортотропных материалов, обладающих деформационной анизотропией, прямого решения системы разрешающих алгебраических уравнений получить не удастся. Поэтому исходная нелинейная задача решалась методом «переменных параметров упругости» совместно с пошаговым нагружением [24].

Для решения тестовой задачи объектом принята пластина квадратного очертания с лицевыми размерами  $120 \times 120$  мм, толщиной  $h = 20$  мм, с круговым отверстием диаметром 40 мм. Загружение рассматривалось равномерно распределенной по контурным плоскостям  $\Gamma_2$  растягивающей или сжимающими нагрузками интенсивностью  $p$  (см. рис. 1). Материал пластины был принят в виде трехармированного тканого полимерного композита П36-50 [25] со следующими механическими характеристиками ( $E$ ,  $G$ ,  $\Gamma$ Па):

$E_1^+$ . . . . .	10,3
$E_1^-$ . . . . .	11,77
$E_2^+$ . . . . .	17,6
$E_2^-$ . . . . .	18,54
$\nu_{12}^+$ . . . . .	0,188
$\nu_{12}^-$ . . . . .	0,215
$\nu_{21}^+$ . . . . .	0,110
$\nu_{21}^-$ . . . . .	0,136
$G_{12}$ . . . . .	3,14

Ввиду симметричности рассматриваемой задачи за расчетную схему принималась четвертая часть плоскости пластины, а опущенные участки представлялись мнимыми условиями на границах, учитывающими характер симметричной деформации. Конечно-элементная расчетная схема задачи представлена на рис. 2 (числовые обозначения – номера узлов). В расчетной части пластины было принято 1440 треугольных конечных элементов с количеством узлов 778. Характерное решение задачи продемонстрировано на примере распределения нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  вдоль сечения по узловым точкам при растяжении, которое приведено на рис. 3.

Анализ результатов расчетов проводился при трех характерных величинах интенсивности нагрузки  $P_1 = 6$ ,  $P_2 = 12$ ,  $P_3 = 18$  МПа. Данный выбор был



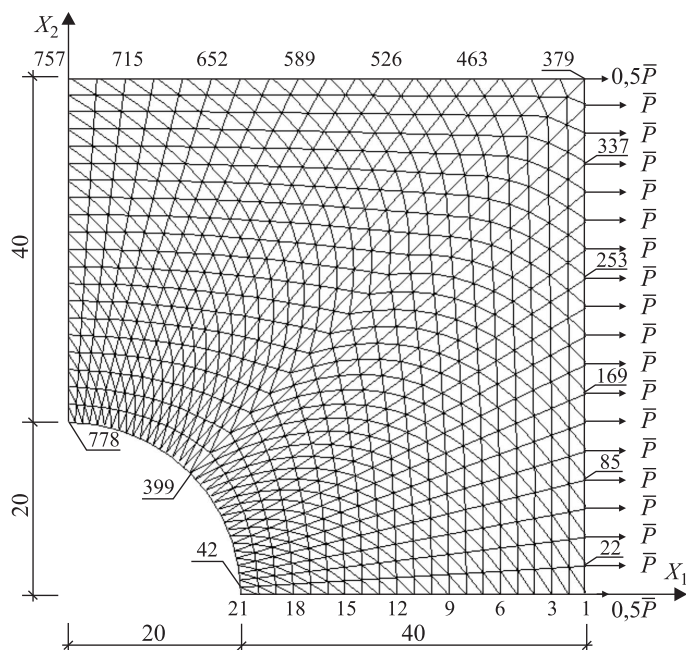


Рис. 2. Конечно-элементная сетка расчетной схемы пластины с круговым концентратором напряжений

Fig. 2. Finite element grid of the design scheme of a plate with a circular stress concentrator

определен возможностью оценки влияния усложненных свойств композита ПЗ6-50 на разных уровнях нагружения.

На рис. 3 кривые 1–3 обозначают характерные решения при различных уровнях нагрузок. Так, кривые 1 соответствуют интенсивности нагрузки  $P_1$ , 2 –  $P_2$ , 3 –  $P_3$ . Сплошными линиями на рис. 3 представлены решения, полученные на основе классической теории упругости для ортотропных материалов при обнулении нормированных напряжений в уравнениях состояния (3)–(5), штриховыми – решения с учетом полных зависимостей (3)–(5).

Рис. 3 свидетельствует о незначительности проявления деформационной анизотропии композита ПЗ6-50 по отношению к классическому решению при нагружении интенсивностью  $P_1$ . То есть данный уровень нагрузки для напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  вызывает незначительные отклонения от расчетов по классической теории деформирования ортотропных материалов. В зоне концентрации напряжений отклонение величин напряжений  $\sigma_{11}$  от классических при  $P_1$  не превышает 13,03 %. При больших величинах нагрузок наблюдается рост указанной разницы, при  $P_2$  она достигает 27,66 %, а при  $P_3$  – 33,12 %. Таким образом, с ростом нагрузки влияние зависимости жесткостей композита от вида напряженного состояния на количественное и качественное распределение напряжений проявляется более заметно и становится достаточно ощутимым. Различие для напряжений  $\sigma_{22}$  в зоне концентратора достигает 42,3 %, но их уровень в 2–3 раза ниже, чем для  $\sigma_{11}$ .

При равномерном сжатии нагрузками, приложенными на контурных плоскостях  $\Gamma_2$ , рассматривались величины  $P_1 = -5$ ,  $P_2 = -12,5$ ,  $P_3 = -20$  МПа. Для оценки влияния свойств деформационной анизотропии на максималь-

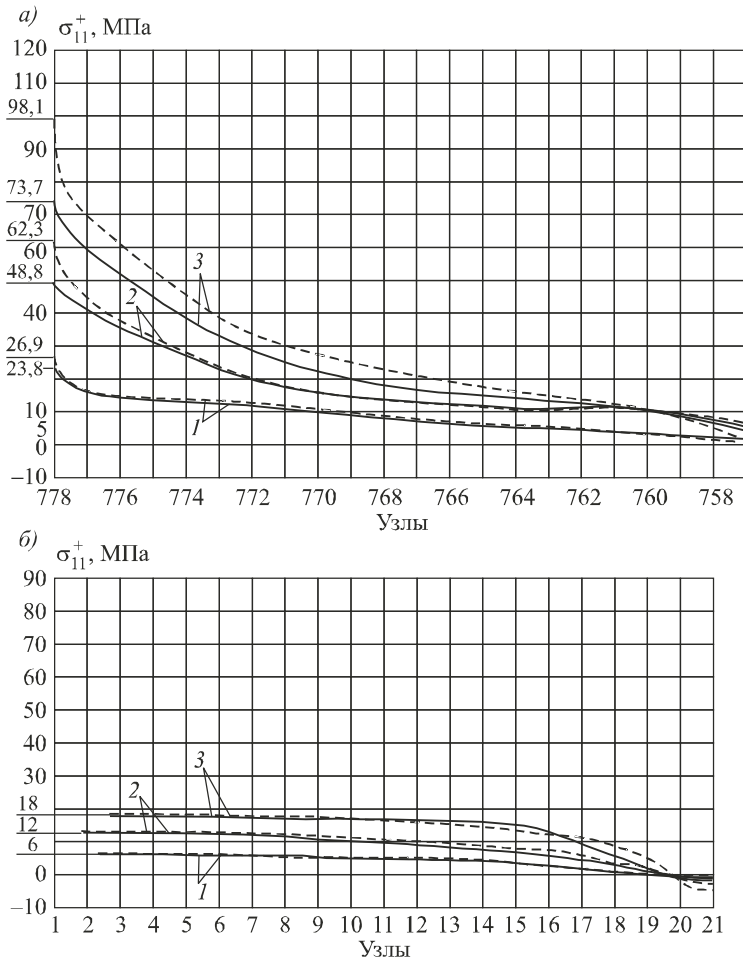


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  вдоль оси  $X_1$  при растяжении  
а – по узлам 757–778; б – по узлам 1–21

Fig. 3. Distribution of normal stresses  $\sigma_{11}$  along the  $X_1$  axis during tension

a – at nodes 757–778; b – at nodes 1–21

ные напряжения  $\sigma_{11}$ , вызванные их концентрацией в узле 778, рост которых является основной причиной разрушения композита, в таблице приведены величины, вызванные растяжением и сжатием контурными нагрузками разного уровня.

Результаты расчета концентрации напряжений в зоне отверстия в классическом варианте (при обнулении нормированных напряжений) для ортотропного материала, полученные по разработанной модели, сопоставлялись с цифровым аналогом использования пакета ANSYS 16.0 при том же количестве конечных элементов. Результаты сопоставления показали неплохую согласованность между собой (погрешность для максимальных величин  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  не превышает 1,8 %). Это сравнение подтверждает физическую непротиворечивость и математическую адекватность разработанной модели.

**Максимальные напряжения  $\sigma_{11}$  в узле 778, МПа**  
**Maximum voltages  $\sigma_{11}$  in the node 778, MPa**

Вид нагружения	Вариант решения	$P_1 = 6$	$P_2 = 12$	$P_3 = 18$	$P_1 = -5$	$P_2 = -12,5$	$P_3 = -20$
Растяжение	Классическое	23,8	48,8	73,7	–	–	–
	По усложненной модели	26,9	62,3	98,1			
Сжатие	Классическое	–	–	–	–20,7	–52,4	–86,4
	По усложненной модели				–23,6	–64,2	–112,2

**Заключение.** Анализируя исходные характеристики композита П36-50 и полученные результаты решения задачи о концентрации напряжений, следует отметить, что пренебрежение деформационной анизотропией принятого материала может привести к существенным погрешностям при вычислении основных характеристик напряженно-деформированного состояния конструкций. Однако различие между модулями упругости при растяжении и сжатии в направлении оси  $X_1$  составляет 12,5 %, а в направлении оси  $X_2$  – всего 5,07 %. Ясно, что данные показатели являются достаточно минимальными отклонениями от нулевой разницы в разных направлениях, которая имеется у традиционных ортотропных материалов, названных классическими. Для композитов со значительно большими различиями жесткостных характеристик на растяжение и сжатие вдоль главных осей ортотропии погрешность классических моделей существенно возрастет и для отдельных параметров напряженно-деформированное состояние может достигнуть 100 % и более [26].

#### Список источников

1. Ушаков Б.Н., Фролов И.П. Напряжения в композитных конструкциях. М.: Машиностроение, 1979. 134 с.
2. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
4. Максименко В.Н. Прогнозирование прочности композитных элементов с концентраторами напряжений. Обзор методов // Вопросы авиационной науки и техники. Серия: Аэродинамика и прочность летательных аппаратов. 1995. № 1. С. 45–77.
5. Гумеров А.К., Шрон Л.Б. Напряженное состояние и прочность элементов конструкций из разнородных материалов // Сварка. Реновация. Триботехника: Материалы IX Урал. науч.-практ. конф. Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2019. С. 133–138.
6. Гумеров А.К. Новые задачи механики разрушения неоднородных тел // Сварка. Реновация. Триботехника: Материалы IX Урал. науч.-практ. конф. Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2019. С. 127–133.
7. Ромашина А.В., Трещев А.А. Напряженно-деформированное состояние элементов строительных конструкций с технологическими отверстиями, изготовленных из материалов с усложненными свойствами // Трансп. стр-во. 2018. № 10. С. 20–22.

8. *Romashina A.V., Shafigullin L.N., Treschev A.A., Erofeev V.T.* Concentration of stress on holes in a plate of different resistant material // *Astra Salvensis*. 2017. No. 2. P. 213–225.
9. *Kirsch G.* Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre // *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. 1898. No. 42. S. 797–807.
10. *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости. Л.; М.: ГТТИ, 1935. 56 с.
11. *Космодамианский А.С.* Приближенный метод определения напряженного состояния изотропной пластинки с конечным числом круговых отверстий // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. 1960. № 2. С. 132–135.
12. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
13. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
14. *Лехницкий С.Г.* Приближенный метод определения напряжений в упругой анизотропной пластинке вблизи отверстия, мало отличающегося от кругового // *Инж. сборник*. 1953. Т. 17. С. 3–28.
15. *Колпаков А.Г.* Концентрация напряжений в конструкции из однонаправленного материала // *Прикл. механика и техн. физика*. 1982. № 2. С. 110–116.
16. *Леган М.А., Колодезев В.Е., Шеремет А.С.* Анализ хрупкого разрушения пенополистирольных плит с отверстиями // *Прикл. механика и техн. физика*. 2001. Т. 42, № 5. С. 226–228.
17. *Дариязаде С.* Исследование концентрации напряжений вокруг отверстия в пластинах из однонаправленных композитов // *Вестн. НТУ «ХПИ»*. 2010. № 37. С. 68–79.
18. *Дариязаде С., Львов Г.И.* Микро- и макро-концентрация напряжений вокруг отверстий в композитных пластинах // *Вестн. НТУ «ХПИ»*. 2012. № 36. С. 64–75.
19. *Неделин А.В., Трещев А.А.* Напряженное состояние пластинки из дилатирующего материала, ослабленного отверстием // *Изв. вузов. Строительство*. 2001. № 8. С. 16–20.
20. *Трещев А.А., Бобрышев А.А.* Теория деформирования и прочности материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Упругопластические деформации. М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2017. 140 с.
21. *Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Krupitsyn E.S.* Defining equations of deformation of materials with double anisotropy // *Chebyshevskii sbornik*. 2021. Vol. 22, no. 4. P. 369–383.
22. *Клованич С.Ф.* Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запорожье, 2009. 400 с.
23. *Даутов Р.З.* Программирование МКЭ в MATLAB. Казань: Изд-во КГУ, 2010. 71 с.
24. *Петров В.В.* Нелинейная инкрементальная строительная механика. М.: Инфра-Инженерия, 2014. 480 с.
25. *Розе А.В., Душин М.Н.* Трехармированные тканые материалы // *Механика полимеров*. 1970. № 3. С. 471–476.
26. *Treshchev A.A., Zhurin E.A.* Bending of Ring Plates, Performed from an Orthotropic Nonlinear Differently Resistant Material // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020. Vol. 16, Issue 1. P. 130–146.

#### References

1. *Ushakov B.N., Frolov I.P.* Stresses in composite structures. Moscow, 1979. 134 p. (In Russ.).

2. Fudzii T., Dzako M. Mechanics of destruction of composite materials. Moscow, 1982. 232 p. (In Russ.).
3. Cherepanov G.P. Mechanics of destruction of composite materials. Moscow, 1983. 296 p. (In Russ.).
4. Maksimenko V.N. Predicting the strength of composite elements with stress concentrators. Overview of methods. *Voprosy aviatsionnoy nauki i tekhniki. Seriya: Aerodinamika i prochnost' letatel'nykh apparatov = Questions of aviation science and technology. Series: Aerodynamics and strength of aircraft*. 1995; (1): 45–77. (In Russ.).
5. Gumerov A.K., Shron L.B. Stress state and strength of structural elements made of dissimilar materials. *Welding. Renovation. Tribotechnics*. Nizhny Tagil, 2019. P. 133–138. (In Russ.).
6. Gumerov A.K. New problems of mechanics of destruction of inhomogeneous bodies. *Welding. Renovation. Tribotechnics*. Nizhny Tagil, 2019. P. 127–133. (In Russ.).
7. Romashina A.V., Treshchev A.A. Stress-strain state of elements of building structures with technological holes made of materials with complicated properties. *Transportnoye stroitel'stvo = Transport construction*. 2018; (10): 20–22. (In Russ.).
8. Romashina A.V., Shafigullin L.N., Treshev A.A., Erofeev V.T. Concentration of stress on holes in a plate of different resistant material. *Astra Salvensis*. 2017; (2): 213–225.
9. Kirsch G. Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. 1898; (42): 797–807.
10. Kolosov G.V. Application of a complex variable to a plane problem of elasticity theory. Leningrad; Moscow, 1935. 56 p. (In Russ.).
11. Kosmodamianskiy A.S. An approximate method for determining the stress state of an isotropic plate with a finite number of circular holes. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. OTN. Mekhanika i mashinostroeniye = Izvestiya of the USSR Academy of Sciences. REL. Mechanics and mechanical engineering*. 1960; (2): 132–135. (In Russ.).
12. Muskhelishvili N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow, 1966. 708 p. (In Russ.).
13. Savin G.N. Stress distribution near the holes. Kiev, 1968. 887 p. (In Russ.).
14. Lekhnitskiy S.G. An approximate method for determining stresses in an elastic anisotropic plate near a hole that differs little from a circular one. *Inzhenernyy sbornik = Engineering Collection*. 1953; (17): 3–28. (In Russ.).
15. Kolpakov A.G. Stress concentration in a unidirectional material structure. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied mechanics and technical physics*. 1982; (2): 110–116. (In Russ.).
16. Legan M.A., Kolodezev V.E., Sheremet A.S. Analysis of brittle fracture of polystyrene foam boards with holes. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied mechanics and technical physics*. 2001; 42 (5): 226–228. (In Russ.).
17. Dariyazade S. Investigation of stress concentration around the hole in plates made of unidirectional composites. *Vestnik NTU «KhPI» = Bulletin of NTU «KhPI»*. 2010; (37): 68–79. (In Russ.).
18. Dariyazade S., Livov G.I. Micro- and macro-stress concentration around holes in composite plates. *Vestnik NTU «KhPI» = Bulletin of NTU «KhPI»*. 2012; (36): 64–75. (In Russ.).
19. Nedelin A.V., Treshchev A.A. The stressed state of the plate made of dilating material weakened by the hole. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo = News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2001; (8): 16–20. (In Russ.).
20. Treshchev A.A., Bobryshev A.A. Theory of deformation and strength of materials sensitive to the kind of stress state. Elastic-plastic deformations. Moscow; Tula, 2017. 140 p. (In Russ.).

21. Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Krupitsyn E.S. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy. *Chebyshevskii sbornik*. 2021; 22 (4): 369–383.
22. Klovanich S.F. Finite element method in nonlinear problems of engineering mechanics. Zaporozhye, 2009. 400 p. (In Russ.).
23. Dautov R.Z. Programming the FEM in MATLAB. Kazan, 2010. 71 p. (In Russ.).
24. Petrov V.V. Nonlinear incremental construction mechanics. Moscow, 2014. 480 p. (In Russ.).
25. Roze A.V., Dushin M.N. Three-reinforced woven materials. *Mekhanika polimerov = Mechanics of polymers*. 1970; (3): 471–476. (In Russ.).
26. Treshchev A.A., Zhurin E.A. Bending of Ring Plates, Performed from an Orthotropic Nonlinear Differently Resistant Material. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2020; 16 (1): 130–146.

**Информация об авторе**

**А.А. Трещев** – член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор

**Information about of the author**

**A.A. Treshchev** – Corresponding Member of the RAACN, DSc, Professor

Статья поступила в редакцию 14.09.2021  
Одобрена после рецензирования 15.10.2021  
Принята к публикации 22.10.2021

The article was submitted 14.09.2021  
Approved after reviewing 15.10.2021  
Accepted for publication 22.10.2021